

PREPARAZIONE DI FISICA PER L'ESAME DI RIPARAZIONE

1° anno — Liceo Scientifico

Julia Favaro

Avvertenze

Queste note sono pensate come un supporto di ripasso e non sostituiscono in alcun modo il materiale didattico ufficiale che viene presentato durante l'anno. Per una preparazione efficace sono indispensabili lo studio nel tempo, la supervisione di un docente, lo sviluppo personale di un pensiero critico e analitico di fronte ai problemi e, soprattutto, **tanto, tanto esercizio autonomo**.

INDICE

1	Prerequisiti di matematica	4
2	Formulario e concetti chiave	6
2.1	Errori sulle misure	6
2.2	Propagazione degli errori	6
2.3	Elementi di probabilità	7
2.4	Introduzione alla trigonometria	7
2.5	Vettori	8
2.6	I principi fondamentali della statica e dinamica (i principi di Newton)	10
2.7	Molle ideali	10
2.8	Baricentro e centro di massa	11
2.9	Momento di una forza	11
2.10	Le leve	12
2.11	Il piano inclinato	13
2.12	Le forze di attrito	14
2.13	Moto uniformemente accelerato	14
2.14	Funi ideali e carrucole	15
3	Esercizi di ripasso	16
3.1	Propagazione dell'errore e incertezze di misura	16
3.2	Vettori e deduzioni di angoli	20
3.3	Probabilità e regressione lineare	24
3.4	Molle	26
3.5	Centro di massa di lamine 2D omogenee	30
3.6	Scivolamento su piano inclinato liscio	35
4	Domande orale	38
4.1	Misure ed incertezze di misura	38
4.2	Vettori	38
4.3	Molle	39
4.4	Centro di massa di lamine omogenee	39
4.5	Scivolamento su piano inclinato liscio	39
5	Preparazione allo scritto	40
5.1	Consigli per l'esame	40
5.2	Simulazione di esame	40
5.3	Soluzioni	42
6	Ringraziamenti e note d'autore	47

Avvertenze

Argomenti esame di recupero

- Tipi di errore, propagazione degli errori, incertezze assolute e relative.
- Semplice esercizio su vettori: da certe informazioni si deduce un angolo.
- Prova di laboratorio svolta durante l'anno relativa alla misurazione di aree e lunghezze.
- Comportamento di una molla ideale e numero di oscillazioni in termini della costante elastica.
- Determinazione del centro di massa di una lamina rigida e omogenea.
- Moto lungo il piano inclinato in assenza di attrito, rotazione tra la forma del piano e tempo di scivolamento.

Molti degli esercizi indicati si concentrano solo su queste richieste, ma non mancano neanche domande e richieste riguardanti altri argomenti indicati nel formulario, come l'attrito, le serie e le parallele ed i principi di probabilità. Di alcuni esercizi selezionati è riportata anche la soluzione.

1 PREREQUISITI DI MATEMATICA

FORMULE INVERSE E ISOLAMENTO DELLE VARIABILI

Regola del Prodotto/Quoziente: Per spostare un termine moltiplicativo al membro opposto di un'equazione (da sinistra a destra o viceversa), esso va diviso da entrambe le parti:

$$a \cdot b = c \iff a = \frac{c}{b}$$

Regola della Potenza/Radice: Per eliminare un quadrato si applica la radice quadrata ad ambo i membri (ricordando che in fisica consideriamo solo soluzioni reali positive):

$$x^2 = y \implies x = \sqrt{y}$$

EQUAZIONI LINEARI

Risolvere un'equazione di primo grado significa trovare il valore dell'incognita (ad esempio x) che rende vera l'uguaglianza. La regola d'oro è **isolare la variabile** applicando i principi di equivalenza.

Regola della Somma: Puoi sommare o sottrarre lo stesso termine a entrambi i membri. In pratica: quando sposti un termine da un lato all'altro dell'uguale ($=$), questo **cambia segno** (da $+$ diventa $-$ e viceversa).

$$x + b = c \Rightarrow x + b - b = c - b \Rightarrow x = c - b$$

Regola del Prodotto: Puoi moltiplicare o dividere entrambi i membri per un numero diverso da zero. In pratica: un termine moltiplicativo al numeratore passa al denominatore dall'altro lato (e viceversa).

$$a \cdot x = c \Rightarrow a \cdot x \cdot \frac{1}{a} = c \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{b} = c \Rightarrow \frac{x}{b} \cdot b = c \cdot b \Rightarrow x = \frac{c}{a}$$

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA TRAMITE IL METODO DI SOSTITUZIONE

Quando hai a disposizione due equazioni con due incognite diverse (ad esempio, la tensione della fune T e l'accelerazione a), esse devono essere risolte contemporaneamente. Il metodo più intuitivo e universale è il **metodo di sostituzione**, che si sviluppa in quattro passaggi fondamentali:

1. **Isola** una delle due variabili di cui non conosci il risultato, con i metodi indicati sopra, in una delle due equazioni (scegli la più semplice algebricamente).
2. **Sostituisci** l'espressione ottenuta al posto di quella stessa variabile nella seconda equazione. Otterrai così un'equazione singola a una sola incognita.
3. **Risolvi** l'equazione a una sola incognita, usando i metodi qui sopra, per trovarne il valore numerico (o letterale).
4. **Sostituisci a ritroso** il valore appena trovato nella prima equazione per ricavare la seconda incognita.

EQUIVALENZE

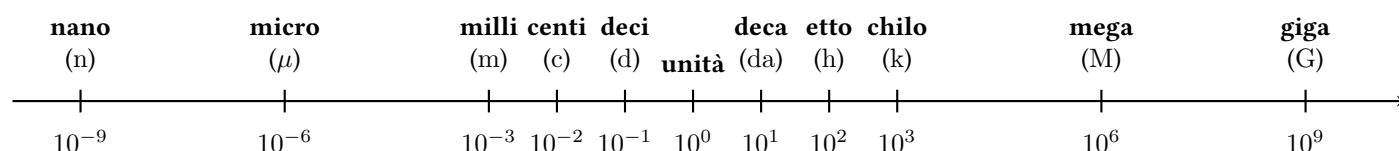
In fisica, ogni numero deve essere accompagnato dalla sua unità di misura, con i vari multipli e sottomultipli. Prima di inserire i dati in una formula, assicurati di aver convertito tutte le grandezze nelle unità standard che ti servono.

Lunghezza: $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$

Massa: $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg} = 0,001 \text{ kg}$

Densità: $1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$

Volume (Capacità): $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$



IL CERCHIO E LA CIRCONFERENZA

Dato un cerchio piano di raggio R (o di diametro equivalente $d = 2R$):

- **Lunghezza della circonferenza:** Rappresenta il perimetro del cerchio.

$$C = 2\pi R = \pi d$$

- **Area del cerchio:** La misura della superficie bidimensionale racchiusa dalla curva.

$$A = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

I SOLIDI GEOMETRICI ASSOCIATI

Oltre al cubo e al parallelepipedo negli esercizi troviamo spesso:

1. **Il cilindro:**

$$S_{\text{est}} = 2\pi r h$$

$$V = S_{\text{base}} \cdot h = \pi R^2 h = \frac{\pi d^2}{4} h$$

2. **La sfera:** Definita unicamente dal suo raggio R .

$$S_{\text{est}} = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

TEOREMA DI PICK

L'area A di un poligono i cui vertici giacciono su una griglia (punti con coordinate intere) è data da:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

- I : numero di punti della griglia interni alla sagoma,
- P : numero di punti della griglia che si trovano esattamente sul bordo (perimetro) della sagoma
- A : area della sagoma espressa in unità di quadretti della griglia.

2 FORMULARIO E CONCETTI CHIAVE

2.1 ERRORI SULLE MISURE

MEDIA ARITMETICA

Rappresenta il valore centrale classico.

$$AM = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

MEDIA QUADRATICA

E' una misura statistica particolarmente sensibile ai valori elevati

$$QM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i x_i^2}$$

SEMIDISPERSIONE MASSIMA O ERRORE MASSIMO

E' una misura che ci indica come l'errore massimo che possiamo fare su un set di misure x

$$E_{semi} = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

SCARTO QUADRATICO MEDIO O DEVIAZIONE STANDARD

Rappresenta la deviazione/la distanza di ciascun punto dalla media aritmetica.

$$DEV = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad VAR = \sigma^2$$

ERRORE ASSOLUTO

Δx è l'errore massimo, la risoluzione o lo scarto quadratico medio a seconda dei casi. Ha al massimo 2 cifre significative.

ERRORE RELATIVO O PERCENTUALE

$$e_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}}, \quad e_r\% = e_r \cdot 100$$

MISURA

Deve essere sempre accompagnata da un'unità di misura. Errore e valore centrale devono avere lo stesso numero di cifre decimali

$$MIS = (\bar{x} + e_{ass}) \text{ unità di misura}$$

2.2 PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

PRODOTTO CON UN NUMERO

I numeri puri non hanno incertezza.

$$\begin{cases} x = cA \\ \Delta x = c\Delta A \end{cases}$$

SOMMA E SOTTRAZIONE

Si sommano gli errori assoluti.

$$\begin{cases} x = A + B \\ \Delta x = \Delta A + \Delta B \end{cases}$$

PRODOTTO E DIVISIONE

Si sommano gli errori relativi.

$$\begin{cases} x = A \cdot B \text{ o } x = A/B \\ e_{rx} = e_{ra} + e_{rb} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta X}{\bar{x}} \end{cases}$$

RADICE QUADRATA

$$\begin{cases} x = \sqrt{A} \\ e_{rx} = \frac{1}{2}e_{ra} = \frac{1}{2} \frac{\Delta A}{A} \end{cases}$$

2.3 ELEMENTI DI PROBABILITÀ

COSA È LA PROBABILITÀ?

Nella sua forma più semplice la probabilità che un evento accada è il numero di eventi favorevoli diviso il numero totale di possibili casi. E' sempre un numero minore di 1.

EVENTI INDIPENDENTI

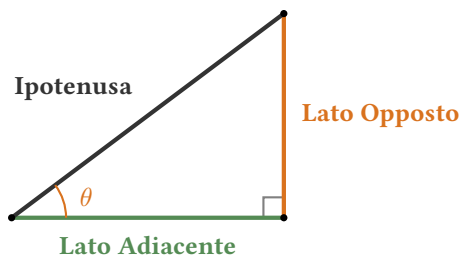
Quando due soggetti compiono azioni indipendenti, la probabilità congiunta (ovvero che entrambi accadano in contemporanea e indipendentemente dall'altro) è il prodotto delle singole probabilità:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2.4 INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

La trigonometria studia le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo.

Dato un triangolo rettangolo con un angolo acuto θ :



- Il **Sen**o ($\sin \theta$) rappresenta il rapporto tra il **Lato Opposto** all'angolo e l'**Ipotenusa**:

$$\sin \theta = \frac{\text{Lato Opposto}}{\text{Ipotenusa}}$$

- Il **Cos**eno ($\cos \theta$) rappresenta il rapporto tra il **Lato Adiacente** all'angolo e l'**Ipotenusa**:

$$\cos \theta = \frac{\text{Lato Adiacente}}{\text{Ipotenusa}}$$

- La **Tang**ente ($\tan \theta$) è il loro rapporto

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

VALORI NOTEVOLI DI SENO E COSENO

Gradi	$\sin \theta$	$\cos \theta$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
180°	0	-1

RISOLUZIONE DI TRIANGOLI QUALSIASI

Sia dato un triangolo qualunque di lati a, b, c e angoli opposti rispettivamente α, β, γ .

TEOREMA DEI SENI

In un triangolo qualsiasi, il rapporto tra la misura di ciascun lato e il seno dell'angolo opposto è costante:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (2.1)$$

TEOREMA DEL COSENO (CARNOT)

Il quadrato di un lato è pari alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo compreso tra essi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (2.2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (2.3)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad (2.4)$$

Attenzione

Il teorema di Pitagora è un caso particolare in cui uno degli angoli è di 90° .

2.5 VETTORI

Un **vettore** $\vec{v}$ è un'entità matematica definita da tre caratteristiche: **modulo** (la lunghezza), **direzione** (la retta su cui giace) e **verso** (il senso di percorrenza).

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

Nel piano bidimensionale, un vettore $\vec{v}$ con coda nell'origine e punta nel punto (v_x, v_y) si esprime come:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (v_x; v_y) \quad (2.5)$$

dove $\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono i versori fondamentali degli assi x e y (vettori di modulo =1).

SCOMPOSIZIONE E COORDINATE

Dato un vettore di modulo v che forma un angolo θ con il semiasse positivo delle x :

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta \quad (2.6)$$

Viceversa, note le componenti cartesiane v_x e v_y :

- **Modulo:** (Teorema di Pitagora)

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.7)$$

- **Direzione:** (l'angolo)

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (2.8)$$

SOMMA VETTORIALE

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, la loro somma è il vettore risultante $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

METODI GEOMETRICI

- **Punta-Coda:** Si posiziona la coda di $\vec{b}$ sulla punta di $\vec{a}$. Il vettore somma $\vec{s}$ congiunge la coda libera di $\vec{a}$ con la punta libera di $\vec{b}$.
- **Parallelogramma:** Si fanno coincidere le code di $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Si tracciano le parallele ai vettori formando un parallelogramma. La diagonale uscente dalla coda comune è la somma $\vec{s}$.

METODO ALGEBRICO (PER COMPONENTI)

Si sommano direttamente le componenti omonime lungo gli assi:

$$s_x = a_x + b_x, \quad s_y = a_y + b_y$$

$$\vec{s} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$$

DIFFERENZA VETTORIALE

La differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ equivale alla somma di $\vec{a}$ con l'opposto di $\vec{b}$:

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j}$$

Geometricamente, equivale a fare il metodo punta coda con $-\vec{b}$.

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

Moltiplicare un vettore $\vec{v}$ per un numero reale $k \in \mathbb{R}$ produce un nuovo vettore $\vec{w} = k\vec{v}$:

$$\vec{w} = (kv_x)\hat{i} + (kv_y)\hat{j}$$

Il modulo risulta riscalato: $w = |k| \cdot v$. Il verso resta lo stesso se $k > 0$, mentre si inverte se $k < 0$.

PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ restituisce un **numero reale** (uno scalare).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Rappresenta il prodotto del modulo di uno per la proiezione ortogonale dell'altro su di esso.

Definizione Algebrica:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Proprietà fondamentale:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b} \quad (\theta = 90^\circ)$$

PRODOTTO VETTORIALE

Il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ restituisce un **terzo vettore** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (o $\vec{a} \wedge \vec{b}$).

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = a \cdot b \cdot \sin \theta$$

Direzione: Ortogonale al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$. **Verso:** Ottenuto con la **regola della mano destra**: disponendo il pollice lungo $\vec{a}$ e l'indice lungo $\vec{b}$, il medio indica il verso di $\vec{c}$ (ortogonale uscente o entrante dal palmo). **Proprietà fondamentali:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\theta = 0^\circ \text{ o } 180^\circ)$$

Attenzione

Il prodotto vettoriale è **anticommutativo**: quindi stai molto attento a che ordine lo fai!

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Infatti il verso dato dalla regola della mano destra cambia se inverti pollice ed indice!

2.6 I PRINCIPI FONDAMENTALI DELLA STATICA E DINAMICA (I PRINCIPI DI NEWTON)

PRIMO PRINCIPIO (INERZIA)

Un corpo resta fermo o continua a muoversi in linea retta a velocità costante, a meno che una forza esterna non intervenga a cambiare il suo stato.

SECONDO PRINCIPIO ($F = ma$)

La forza totale o la risultante delle forze applicata a un corpo è uguale alla sua massa moltiplicata per l'accelerazione che riceve.

Attenzione

- E' una somma vettoriale quindi $\vec{R} = \sum_i F_i$
- Distingui tra modulo e vettore: $|\vec{R}| = m|\vec{a}|$
- E' sempre fondamentale stabilire subito un sistema di riferimento: dove è posizionata l'origine? Come sono messi gli assi? Le forze sono positive o negative su questi assi? E poi si scompone sempre sia sull'asse x che sull'asse y

$$\vec{R} = \sum_i F_i \rightarrow \begin{cases} R_x = \sum_i F_{i,x} = m \cdot a_x \\ R_y = \sum_i F_{i,y} = m \cdot a_y \end{cases}$$

- Se la somma delle forze è zero, il moto non cambia, quindi se era fermo rimane fermo. Mi raccomando
- Se due oggetti sono legati fisicamente da un oggetto, come una corda o un qualunque vincolo, ed è quindi supponibile che una si muova se l'altra si muove, avranno la stessa accelerazione, anche se hanno masse diverse e quindi forze diverse potenzialmente.

TERZO PRINCIPIO (AZIONE E REAZIONE)

Se un corpo esercita una forza su un secondo corpo, il secondo corpo esercita sul primo una forza uguale e contraria. Le forze si presentano sempre in coppie: ad ogni azione corrisponde una reazione con lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto.

2.7 MOLLE IDEALI

LEGGE DI HOOKE

Descrive la forza di una molla. Si tratta di una forza di richiamo: la molla fa sempre una forza contraria a chi la tira o la schiaccia (da qui il segno meno nel caso in cui usiamo i vettori).

$$\vec{F} = -k\vec{x} \rightarrow |\vec{F}| = k|\vec{x}|$$

MOLLE IN PARALLELO

Subiscono lo stesso allungamento e hanno una costante elastica più alta.

$$k_{eq,par} = k_1 + k_2$$

MOLLE IN SERIE

Subiscono la stessa forza e hanno una costante elastica più bassa.

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow k_{eq} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

2.8 BARICENTRO E CENTRO DI MASSA

DEFINIZIONE MATEMATICA

Il **centro di massa (CM)** di un sistema rappresenta il punto geometrico in cui si può immaginare concentrata tutta la massa del sistema ai fini del calcolo delle forze esterne. E' la media ponderata/mediata delle masse m_i posizionate alle coordinate $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

Attenzione

Se il corpo è sospeso o vincolato nel CM, la forza peso non genera momento e il corpo resta in equilibrio in qualsiasi orientazione.

IMPORTANZA DELLE SIMMETRIE

Se un corpo rigido omogeneo possiede simmetrie geometriche, la determinazione del CM si semplifica drasticamente:

- Il CM si trova necessariamente sull'asse di simmetria del corpo.
- Il CM coincide con il centro geometrico (es. cerchio, sfera, rettangolo, anello).

METODO DEL 'DIVIDE ET IMPERA'

Per calcolare il CM di lamine omogenee complesse (es. lettere L, U, R):

1. Si scompone la figura in sotto-lamine elementari (es. rettangoli, quadrati) di area A_i .
2. Si determina il baricentro individuale $C_i(x_i, y_i)$ di ciascuna sotto-lamina per simmetria.
3. Si applica la formula ponderata usando le aree A_i al posto delle masse m_i (supponendo che l'oggetto sia omogeneo e quindi a un'area più grande corrisponde una massa più grande):

$$X_{cm} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}, \quad Y_{cm} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

METODO DELLE MASSE NEGATIVE (SOTTRAZIONE)

Se una lamina omogenea presenta dei fori, l'area vuota viene trattata come una sottolamina a **massa negativa** (sempre supponendo che la lastra sia omogenea):

$$X_{cm} = \frac{A_{tot} X_{tot} - A_{foro} X_{foro}}{A_{tot} - A_{foro}}$$

2.9 MOMENTO DI UNA FORZA

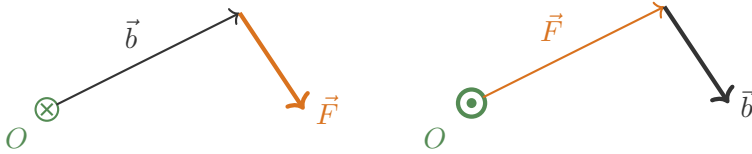
Il momento di una forza $\vec{F}$ applicata a un punto distante $\vec{r}$ dal polo O è definito dal prodotto vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow M = b \cdot F$$

dove b è il **Braccio**: La distanza minima tra il polo O e la retta d'azione della forza.

E' sempre ortogonale al piano della forza e del braccio e ha segno

- Rotazione **antioraria**: $M > 0$ (+, uscente)
- Rotazione **oraria**: $M < 0$ (-, entrante)



CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO

Un corpo rigido inizialmente fermo rimane in perfetto equilibrio statico se e solo se sono precluse sia la traslazione che la rotazione:

1. La risultante di tutte le forze esterne deve essere nulla:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \implies \begin{cases} \sum F_{x,i} = 0 \\ \sum F_{y,i} = 0 \end{cases}$$

2. La somma dei momenti di tutte le forze esterne, calcolata rispetto a un **qualsiasi polo** O , deve essere nulla:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0} \implies \sum M_i = 0$$

2.10 LE LEVE

Una **leva** è una macchina semplice costituita da un'asta girevole attorno a un asse fisso, chiamato **fulcro** (F). Sulla leva agiscono:

- **Forza motrice** (F_m): La forza applicata per compiere il lavoro (agisce sul braccio motore b_m).
- **Forza resistente** (F_r): La forza da vincere (agisce sul braccio resistente b_r).

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

La leva è in equilibrio alla rotazione quando il momento della forza motrice annulla esattamente il momento della forza resistente rispetto al fulcro:

$$F_m \cdot b_m = F_r \cdot b_r$$

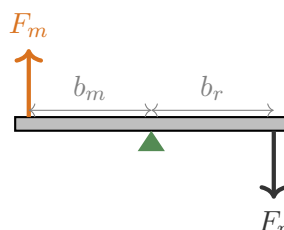
Una leva si dice:

- **Vantaggiosa** se $b_m > b_r$ (si applica meno forza di quella da vincere).
- **Svantaggiosa** se $b_m < b_r$ (si applica più forza, ma si guadagna in precisione).
- **Indifferente** se $b_m = b_r$.

I GENERE

Il fulcro F si trova **tra** la forza motrice F_m e la forza resistente F_r .

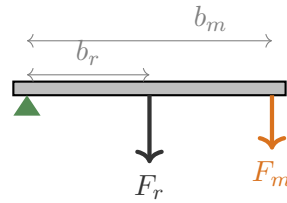
- **Vantaggio**: Può essere vantaggiosa ($b_m > b_r$), svantaggiosa ($b_m < b_r$) o indifferente.
- **Esempi**: Forbici



II GENERE

La forza resistente F_r si trova **tra** il fulcro F e la forza motrice F_m .

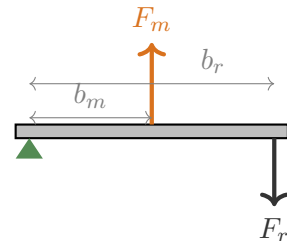
- **Vantaggio:** Sempre **vantaggiosa** poiché il braccio motore è necessariamente più lungo del braccio resistente ($b_m > b_r \implies G > 1$).
- **Esempi:** schiaccianoci



III GENERE

La forza motrice F_m si trova **tra** il fulcro F e la forza resistente F_r .

- **Vantaggio:** È sempre **svantaggiosa** poiché il braccio motore è necessariamente più corto del braccio resistente ($b_m < b_r \implies G < 1$).
- **Esempi:** Pinzette.



2.11 IL PIANO INCLINATO

Il piano inclinato è una macchina semplice costituita da una superficie piana e rigida inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Ha una lunghezza L (l'ipotenusa) e un'altezza h (il cateto opposto).

SCOMPOSIZIONE GEOMETRICA DELLE FORZE

La forza peso $\vec{F}_p$ del corpo di massa m agisce in direzione verticale diretta verso il basso. Per studiare il moto lungo la rampa, essa deve essere proiettata lungo due assi di riferimento ortogonali orientati:

- **Asse parallelo ($//$) al piano** (direzione del moto):

$$F_{p, //} = mg \sin \theta = mg \frac{h}{L}$$

Questa componente spinge il corpo verso la base del piano.

- **Asse perpendicolare ($\perp$) al piano** (direzione normale):

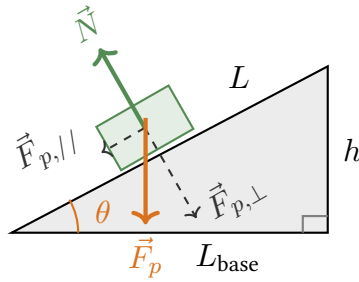
$$F_{p, \perp} = mg \cos \theta = mg \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L}$$

Questa componente preme il corpo contro la superficie.

LA REAZIONE VINCOLARE NORMALE

Poiché il blocco è vincolato a scivolare lungo la superficie e non può penetrare nel piano, l'accelerazione lungo l'asse perpendicolare è nulla ($a_{\perp} = 0$). Per la prima legge di Newton, la reazione normale $\vec{N}$ bilancia esattamente la forza perpendicolare:

$$N = F_{p, \perp} = mg \cos \theta$$



2.12 LE FORZE DI ATTRITO

L'attrito è una forza di contatto parallela alla superficie d'appoggio che si oppone sempre al moto relativo o al tentativo di scivolamento. E' sempre descritto da una costante (che dipende dal tipo di superficie) chiamata μ .

ATTRITO STATICO ($\vec{F}_s$)

Agisce quando il corpo è fermo. Il corpo si mette in movimento non appena $F_{\text{ext}} > F_{s,\text{max}}$.

$$F_{s,\text{max}} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot mg \cos \theta$$

Il corpo si mette in movimento non appena $F_{\text{ext}} > F_{s,\text{max}}$. Un blocco appoggiato su un piano inclinato scabro rimane fermo per solo attrito se e solo se la forza peso parallela non supera l'attrito statico massimo.

ATTRITO DINAMICO ($\vec{F}_d$)

Agisce quando il corpo è in moto relativo rispetto alla superficie. Il corpo si ferma non appena $F_{\text{ext}} < F_d$.

$$F_d = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot mg \cos \theta \quad (2.9)$$

Per ogni accoppiamento di materiali vale sempre: $\mu_d < \mu_s$.

2.13 MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$v(t) = v_0 + at$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

CADUTA LIBERA VERTICALE ($a = g$)

Nel vuoto, un corpo soggetto alla sola forza peso cade con accelerazione pari a $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ indipendentemente dalla sua massa:

- Partendo da fermo ($v_0 = 0$):

$$t_{\text{caduta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_f = \sqrt{2gh} \quad (2.10)$$

DISCESA SU PIANO INCLINATO LISCIO

Sul piano liscio l'unica forza lungo il piano è $F_{p,||}$. Dal secondo principio ($F_{p,||} = ma$):

$$mg \sin \theta = ma \implies a = g \sin \theta \quad (2.11)$$

- Tempo per percorrere l'intera rampa L (da fermo):

$$t_{\text{discesa}} = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{2L^2}{gh}} \quad (2.12)$$

- Velocità finale alla base:

$$v_f = \sqrt{2aL} = \sqrt{2(g \sin \theta) \left(\frac{h}{\sin \theta} \right)} = \sqrt{2gh} \quad (2.13)$$

Attenzione

Nota bene che l'accelerazione è più bassa in questo caso.

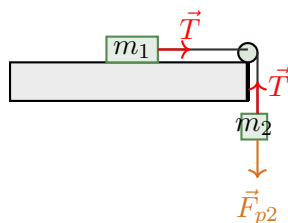
2.14 FUNI IDEALI E CARRUCOLE

I sistemi a funi e carrucole trasmettono le forze tra corpi rigidi collegati tra loro.

- **Fune ideale:** Ha massa trascurabile ed è inestensibile. La tensione T ha lo stesso identico modulo in ogni punto della fune.
- **Carrucola ideale:** Ha massa e attrito trascurabili. Cambia solo la direzione della fune senza alterare T .

MASSA SU TAVOLO E MASSA APPESA

Una massa m_1 è appoggiata su un tavolo liscio, collegata tramite una fune ideale passante su una carrucola d'angolo a una massa m_2 appesa in verticale.



Impostiamo le equazioni del moto per i due corpi:

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \quad (2.14)$$

Sommando membro a membro le equazioni si elide la tensione T , ricavando l'accelerazione comune a :

$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.15)$$

Sostituendo l'accelerazione, si ricava la tensione T :

$$T = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.16)$$

3 ESERCIZI DI RIPASSO

3.1 PROPAGAZIONE DELL'ERRORE E INCERTEZZE DI MISURA

Attenzione

- Fai le conversioni necessarie.
- Le unità di misura devono sempre essere esplicite e coerenti.
- Il numero di cifre significative del valore centrale deve essere uguale a quello dell'errore.

SOMMA DELLE LUNGHEZZE DI UN BINARIO



Devi misurare la lunghezza totale di un binario composto da tre segmenti: $l_1 = (2.45 \pm 0.01)$ m, $l_2 = (3.12 \pm 0.02)$ m e $l_3 = (1.98 \pm 0.01)$ m. Qual è l'incertezza assoluta sulla lunghezza totale?

ANALISI DIMENSIONALE



Verifica, mediante analisi dimensionale, la correttezza della celebre formula per la velocità finale di caduta libera di un grave, in assenza di attrito, data da $v = \sqrt{2gh}$, dove v è la velocità, g è l'accelerazione di gravità e h è l'altezza di caduta.

VOLUME DI UN PARALLELEPIPEDO



Le dimensioni di un parallelepipedo sono $a = (10.0 \pm 0.1)$ cm, $b = (5.0 \pm 0.1)$ cm e $c = (2.0 \pm 0.1)$ cm. Calcola il volume e l'incertezza assoluta e la percentuale relativa del risultato.

DENSITÀ DI UN CORPO



Un corpo ha massa $m = (450 \pm 5)$ g e volume $V = (150 \pm 2)$ cm³. Determina la densità ρ esprimendo correttamente l'incertezza assoluta sulla misura.

INCERTEZZE IN TABELLA



La seguente tabella (incompleta, tabella 3.1.5) riporta misure ed errori di una lunghezza L , di un tempo T e di un'accelerazione a . Completa le caselle vuote e determina infine la misura e gli errori della velocità v data dalla relazione $v = a \cdot T$.

Misura	Valore centrale	Errore assoluto	Errore relativo
Lunghezza L	200 m	5 m	?
Tempo T	15.0 s	?	4%
Accelerazione a	?	0.2 m/s ²	2.5%

RAGGIO DEL CERCHIO



L'area di un cerchio è stata misurata come $A = (314 \pm 10)$ cm². Utilizzando la propagazione dell'errore per la radice quadrata, determina il raggio del cerchio con la sua incertezza.

CILINDRI E CUBI



Un cilindro omogeneo di nichel $\rho_{\text{Ni}} = 8.8$ kg/l ha raggio di base $R = 5$ cm e altezza $h = 30$ cm. Si noti che $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$. Se un cubo di ghiaccio $\rho_{\text{ghiaccio}} = 0.9$ kg/l ha la stessa massa, Quanti cm misura approssimativamente il suo spigolo?

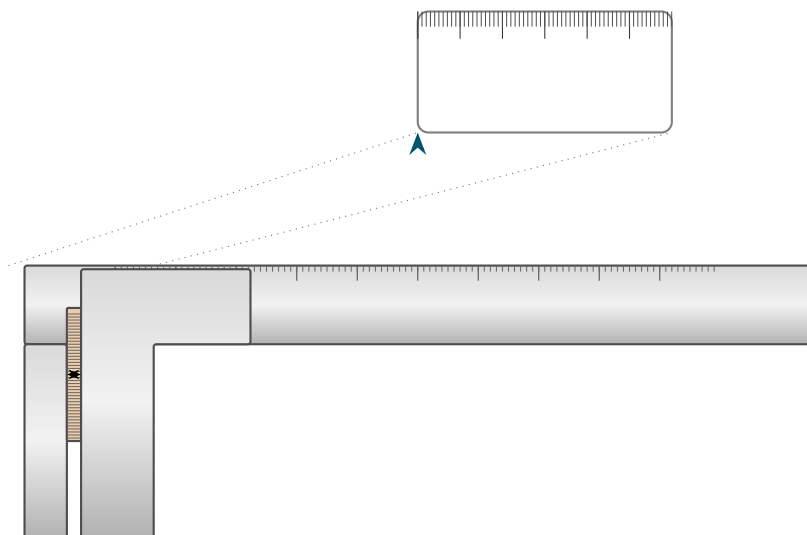


Figura 3.1: Rappresentazione schematica del calibro a corsoio che misura lo spessore di una moneta. I dettagli delle scale sono ingranditi nel riquadro superiore.

MISURIAMO UNA MONETA



Un collezionista chiede a Mattia di misurare con estrema precisione lo spessore s di una moneta. Mattia utilizza un calibro/micrometro con risoluzione $\Delta_{\text{ris}} = 0.01$ mm. Effettua 5 misurazioni indipendenti in punti leggermente diversi del bordo, ottenendo:

2.34 mm, 2.36 mm, 2.35 mm, 2.38 mm, 2.32 mm

1. Calcola il valore medio aritmetico $\bar{s}$ dello spessore della moneta.
2. Calcola la semidisersione massima E_{semi} .
3. Calcola la deviazione standard σ .
4. Confronta il valore di σ e di E_{semi} con la risoluzione dello strumento (0.01 mm). Quale delle tre grandezze descrive meglio l'incertezza reale della misura dello spessore secondo te?
5. (facoltativo) Supponiamo che una sesta misura dia accidentalmente il valore anomalo di 2.55 mm (forse a causa di un granello di polvere sul sensore). Fai un grafico dove l'asse delle ascisse (x) indichi il numero n delle prime misure che prendi in considerazione e sull'asse delle ordinate (y) il valore della media fatta con solo le prime n misure, esattamente nello stesso ordine del testo.

PROPAGAZIONE DELL'ERRORE



Nel laboratorio del Liceo Dini, Mattia deve determinare la densità ρ di un cilindro di bronzo omogeneo. Misura con cura le seguenti grandezze fisiche dirette (esprese con la rispettiva incertezza assoluta):

- Massa: $m = (150.0 \pm 0.5)$ g
- Diametro della base: $d = (2.00 \pm 0.02)$ cm
- Altezza del cilindro: $h = (5.00 \pm 0.05)$ cm

Sapendo che il volume di un cilindro è dato dalla formula $V = \pi \frac{d^2}{4} h$ e la densità è $\rho = \frac{m}{V}$:

1. Determina l'incertezza relativa percentuale della massa $e_r\%(m)$, del diametro $e_r\%(d)$ e dell'altezza $e_r\%(h)$.
2. In base alle regole della propagazione dell'errore, puoi dimostrare che l'incertezza relativa del volume è data da: $e_r(V) = 2 \cdot e_r(d) + e_r(h)$.
3. Calcola il valore centrale del volume V_0 e la sua incertezza assoluta ΔV . Esprimi la misura del volume nel formato corretto ($V_0 \pm \Delta V$). Esprimi il risultato finale con le corrette cifre decimali e unità di misura.
4. Calcola la densità centrale ρ_0 e la sua incertezza assoluta $\Delta \rho$ (suggerimento: parti dall'incertezza relativa della densità). Esprimi il risultato finale con le corrette cifre decimali e unità di misura.

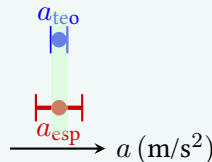
CONFRONTO TEORIA ED ESPERIMENTO



Mattia studia lo scivolamento di un carrellino lungo un binario inclinato liscio. Misura l'altezza verticale del piano $h = (20.0 \pm 0.5)$ cm e la sua lunghezza totale $L = (100.0 \pm 0.5)$ cm. Teoricamente, l'accelerazione ideale del carrello è data da $a_{\text{teo}} = g \cdot \frac{h}{L}$.

1. Calcola l'accelerazione teorica attesa e la sua incertezza assoluta Δa_{teo} propagando gli errori di h e L .
2. Mattia esegue l'esperimento reale facendo partire il carrellino da fermo e cronometrando il tempo t di discesa lungo l'intero binario L . Ottiene: $t = (1.01 \pm 0.04)$ s. L'accelerazione sperimentale si calcola dalla legge del moto: $a_{\text{esp}} = \frac{2L}{t^2}$.
3. Calcola l'accelerazione sperimentale nominale a_{esp} .
4. Calcola l'incertezza relativa di questa accelerazione sperimentale, ricordando che: $e_r(a_{\text{esp}}) = e_r(L) + 2 \cdot e_r(t)$. Determina l'incertezza assoluta Δa_{esp} e scrivi il risultato finale ($a_{\text{esp}} \pm \Delta a_{\text{esp}}$).
5. Gli intervalli sperimentale e teorico $[a_{\text{teo}} - \Delta a_{\text{teo}}, a_{\text{teo}} + \Delta a_{\text{teo}}]$ e $[a_{\text{esp}} - \Delta a_{\text{esp}}, a_{\text{esp}} + \Delta a_{\text{esp}}]$ si sovrappongono?

Attenzione



Regola generale per la compatibilità tra misure:

Molto spesso l'incertezza sui dati sperimentali è più grande rispetto a quella che troviamo da misure teoriche (anche se non sempre). Due misure $x_1 \pm \Delta x_1$ e $x_2 \pm \Delta x_2$ si dicono compatibili se la distanza tra i loro valori centrali è minore o uguale alla somma delle rispettive incertezze assolute:

$$|x_1 - x_2| \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Per poter affermare di aver trovato della nuova fisica è richiesto che i dati sperimentali e quelli teorici e le loro misure con i relativi errori siano incompatibili e ci sia il 99.97% di probabilità che non sia dovuto al caso.

MISURA INDIRETTA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ



In un esperimento avanzato di fisica (Pendolo di Foucault), si intende determinare l'accelerazione di gravità g misurando le proprietà di un pendolo conico: una massa puntiforme collegata a un filo inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza L , fatta ruotare lungo una traiettoria circolare orizzontale di raggio R con un periodo di rotazione costante T .

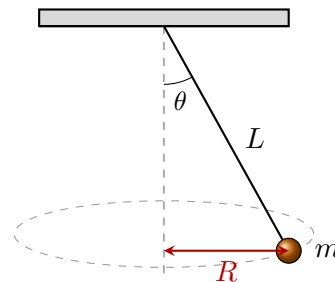
Dalla dinamica del sistema si dimostra che la formula teorica per ricavare g è:

$$g = \frac{4\pi^2 \sqrt{L^2 - R^2}}{T^2}$$

1. Calcola la grandezza $h = \sqrt{L^2 - R^2}$ (altezza verticale della massa rispetto al punto di sospensione) e determina la sua incertezza assoluta Δh mediante la regola di propagazione degli errori per somme e potenze.
2. Calcola il valore centrale di g_0 .
3. Determina l'incertezza assoluta Δg ed esprimi il risultato finale nel formato corretto ($g_0 \pm \Delta g$) m/s².
4. Il valore sperimentale ottenuto è compatibile con il valore teorico standard $g_{\text{teo}} = 9.81$ m/s²?

Dati

- Lunghezza del filo: $L = (1.250 \pm 0.005) \text{ m}$
- Raggio dell'orbita: $R = (0.750 \pm 0.003) \text{ m}$
- Periodo di rotazione: $T = (2.05 \pm 0.02) \text{ s}$

**Soluzione**

Calcoliamo la misura h :

- $h_0 = \sqrt{(1.250)^2 - (0.750)^2} = 1.000 \text{ m}$
- $\Delta(L^2) = e_r(L^2) \cdot L^2 = 2L\Delta L = 0.0125 \text{ m}^2$
- $\Delta(R^2) = e_r(R^2) \cdot R^2 = 0.0045 \text{ m}^2$

L'incertezza della differenza è la somma delle incertezze assolute, mentre l'incertezza relativa su una radice è la metà dell'incertezza relativa sul radicando:

$$e_r(h) = \frac{1}{2} e_r(L^2 + R^2) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta(L^2) + \Delta(R^2)) = 0.0085 \quad (0.85\%)$$

L'incertezza assoluta Δh vale quindi:

$$\Delta h = h_0 \cdot e_r(h) = 1.000 \cdot 0.0085 = 0.0085 \approx 0.009 \text{ m}$$

Invece il valore centale di g_0 è:

$$g_0 = \frac{4\pi^2 h_0}{T_0^2} = \frac{4 \cdot (3.14159)^2 \cdot 1.000}{(2.05)^2} = \frac{39.4784}{4.2025} \approx 9.394 \text{ m/s}^2$$

Essendo $g = 4\pi^2 \cdot h \cdot T^{-2}$, la costante $4\pi^2$ non ha incertezza. L'incertezza relativa del prodotto/quoziente si ottiene sommando gli errori relativi pesati dai rispettivi esponenti, quindi:

$$e_r(g) = e_r(h) + 2 \cdot e_r(T)$$

Calcoliamo l'incertezza relativa del periodo T :

$$e_r(T) = \frac{0.02}{2.05} \approx 0.00976 \quad (0.976\%)$$

L'incertezza relativa totale di g è:

$$e_r(g) = 0.0085 + 2 \cdot (0.00976) = 0.0085 + 0.01952 = 0.02802 \quad (2.80\%)$$

L'incertezza assoluta Δg è:

$$\Delta g = g_0 \cdot e_r(g) = 9.394 \cdot 0.02802 \approx 0.263 \approx 0.3 \text{ m/s}^2$$

Arrotondando il valore centrale alla prima cifra decimale (in coerenza con l'errore):

$$g = (9.4 \pm 0.3) \text{ m/s}^2$$

Poiché $|g_0 - g_{\text{rif}}| = 0.416 \text{ m/s}^2 > \Delta g = 0.3 \text{ m/s}^2$, il valore sperimentale non è strettamente compatibile. La discrepanza suggerisce la presenza di una sottostima dell'errore di misura, magari qualche errore umano oppure di un effetto sistematico non modellato (ad esempio l'attrito dell'aria).

3.2 VETTORI E DEDUZIONI DI ANGOLI

Attenzione

Metti sempre le stanghette che indicano il modulo di un vettore! Non dimenticare mai la differenza tra un vettore, il suo modulo e la sua proiezione lungo un asse (coordinata).

MODULO E ANGOLO DEL VETTORE SPOSTAMENTO



Un vettore di spostamento $\vec{s}$ ha componenti $s_x = 12$ m e $s_y = 5$ m. Calcola il modulo del vettore e l'angolo che forma con l'asse delle ascisse.

ANGOLO E COMPONENTE VERTICALE



Un vettore di modulo 10 m forma un angolo α con l'orizzontale tale che la sua componente verticale sia esattamente 5 m. Qual è il valore dell'angolo?

PRODOTTO SCALARE



Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno moduli rispettivamente di 10 e 20 unità. Sapendo che il loro prodotto scalare è 100, deduci l'angolo tra i due vettori.

CALCOLO GRAFICO E ALGEBRICO DI VETTORI



Nel piano cartesiano, il vettore $\vec{u}$ rappresenta uno spostamento di 6 m verso destra, mentre il vettore $\vec{v}$ rappresenta uno spostamento di 4 m verso il basso. Rappresenta graficamente i vettori $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ e si determini analiticamente il modulo del vettore $\vec{u} + 2\vec{v}$.

PRODOTTO SCALARE



Il vettore $\vec{A}$ punta a est (75 m), il vettore risultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ punta a Nord (95 m). Determina graficamente e analiticamente l'angolo del vettore $\vec{B}$ rispetto all'asse x .

SISTEMA LINEARE VETTORIALE NEL PIANO



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono 3 vettori del piano con le seguenti coordinate/componenti: $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (1; 3)$, $\vec{c} = (8; 9)$. Determina i valori dei numeri reali u e v affinché si abbia $u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

UN ESPLORATORE DISTRATTO



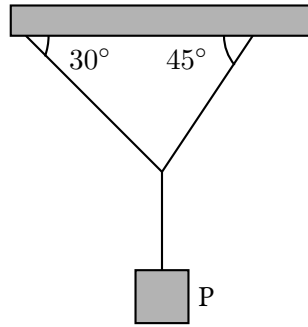
Un esploratore parte dal suo accampamento base e compie tre spostamenti successivi in un'immensa pianura:

- Primo spostamento: 5.0 km in direzione Est.
 - Secondo spostamento: 4.0 km in direzione Nord-Est (inclinato di 45.0° rispetto alla direzione Est).
 - Terzo spostamento: 3.0 km in direzione Nord-Ovest (inclinato di 45.0° rispetto alla direzione Nord verso ovest).
1. Scrivi ciascuno dei tre vettori spostamento in coordinate cartesiane (x, y) , ponendo l'origine nell'accampamento base.
 2. Determina le coordinate cartesiane e il modulo del vettore spostamento risultante!
 3. Calcola l'angolo θ che il vettore risultante forma rispetto alla direzione Est e spiega se l'esploratore si trova più vicino all'Est o al Nord.

3 VETTORI



Si abbia un corpo sospeso al soffitto per mezzo di due corde, come nella figura sottostante. È possibile, conoscendo una delle tre forze (e gli angoli indicati), ricavare le altre due forze?



Soluzione

Il punto centrale si trova in equilibrio se la somma vettoriale delle tre forze applicate è nulla, secondo il secondo principio di Newton:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel nodo N , asse x orizzontale rivolto a destra e asse y verticale rivolto verso l'alto, e scomponiamo le varie forze lungo di esso.

Gli angoli delle corde rispetto all'orizzontale sono $\alpha = 30^\circ$ (corda sinistra) e $\beta = 45^\circ$ (corda destra). Proiettando le tensioni sui due assi si ottiene:

$$\begin{cases} (\hat{x}) : T_2 \cos \beta - T_1 \cos \alpha = 0 \implies T_2 \cos 45^\circ = T_1 \cos 30^\circ \\ (\hat{y}) : T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - P = 0 \implies T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ = P \end{cases}$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di 2 equazioni e 2 incognite ($\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$). Dall'equazione sull'asse x ricaviamo il legame tra le due tensioni T_1 e T_2 :

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = T_1 \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2} = T_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Sostituendo T_2 nell'equazione di equilibrio sull'asse y :

$$T_1 \sin 30^\circ + \left(T_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \sin 45^\circ = P$$

$$T_1 \cdot \frac{1}{2} + T_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = P \implies T_1 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = P$$

Esplicitando infine le due tensioni in funzione di P :

$$T_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} P = (\sqrt{3} - 1) P \approx 0.732 P$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (\sqrt{3} - 1) P = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} P \approx 0.897 P$$

RISOLVERE I TRIANGOLI



In un triangolo qualsiasi ABC , sono noti i moduli di due vettori lato passanti per lo stesso vertice A :

$$|\vec{AB}| = 8.0 \text{ cm}, \quad |\vec{AC}| = 5.0 \text{ cm}$$

Inoltre, il loro prodotto scalare vale esattamente: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20.0 \text{ cm}^2$. Si risolvano i seguenti punti:

1. Calcola il coseno dell'angolo α compreso tra i due vettori e determina l'angolo.
2. Esprimi il vettore lato $\vec{BC}$ come differenza vettoriale tra $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$. Sfruttando la definizione di modulo quadro di un vettore, calcola la lunghezza esatta del terzo lato BC .

3. Calcola gli altri due angoli interni del triangolo con le regole del seno o del coseno!

COMBINAZIONI LINEARI



Consideriamo nel piano cartesiano ortogonale due vettori espressi in componenti cartesiane:

$$\vec{u} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$$

$$\vec{v} = 2\hat{x} - \hat{y}$$

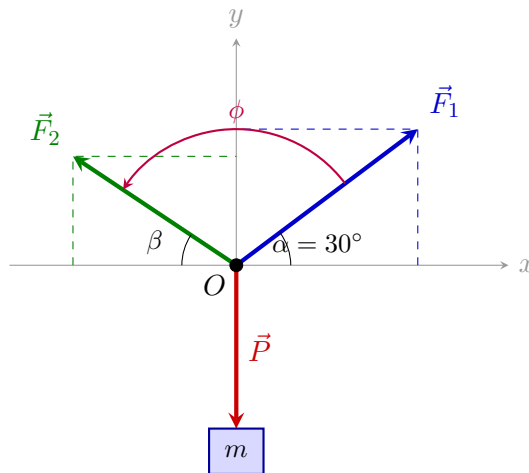
Risolvi i seguenti quesiti:

1. Calcola l'angolo θ compreso tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$. *Suggerimento:* usa il prodotto scalare.
2. Vogliamo costruire un vettore combinazione lineare $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$ dove λ è un numero. Determina per quale valore di λ il vettore risultante $\vec{w}$ è perfettamente perpendicolare al vettore iniziale $\vec{u}$. *Suggerimento:* usa il prodotto scalare. Ti ricordi quando vale zero?
3. (facoltativo) Estendendo i due vettori alla terza dimensione (ponendo cioè la componente z pari a zero per entrambi $\vec{u}$ e $\vec{v}$), calcola il loro prodotto vettoriale $\vec{u} \times \vec{v}$.

LA TORRE DI PISA



Nel cantiere di restauro della Torre di Pisa, un blocco di marmo di massa $m = 800$ kg è mantenuto in equilibrio nel piano verticale xy da tre cavi di acciaio applicati nel punto centrale O .



Sapendo che l'angolo compreso ϕ tra i due cavi $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ soddisfa la condizione trigonometrica sul prodotto scalare:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = -F_1 F_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1. Ricava l'angolo compreso ϕ e determina l'angolo β formato da $\vec{F}_2$ con l'asse x negativo.
2. Imposta le equazioni di equilibrio statico cardinale per il nodo O e calcola i moduli dei vettori forza F_1 e F_2 .
3. Calcola il vettore differenza $\Delta\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$, esprimendo sia le sue componenti cartesiane $(\Delta F_x, \Delta F_y)$ sia il suo modulo $|\Delta\vec{F}|$.

Soluzione

Dalla definizione geometrica del prodotto scalare tra due vettori:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = F_1 F_2 \cos \phi$$

Uguagliando la relazione fornita dal testo:

$$F_1 F_2 \cos \phi = -F_1 F_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos \phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\phi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$$

L'angolo della forza $\vec{F}_1$ rispetto all'asse x positivo è $\alpha = 30^\circ$. L'angolo polare della forza $\vec{F}_2$ sarà:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \phi) = 0$$

Ciò significa che la forza $\vec{F}_2$ è puramente orizzontale.

La forza peso vale $P = mg = 800 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 7848 \text{ N}$ ed è puramente verticale (con segno negativo). Scriviamo le componenti delle tre forze:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = (F_1 \cos 30^\circ, F_1 \sin 30^\circ) = \left(F_1 \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{F_1}{2}\right) \\ \vec{F}_2 = (-F_2, 0) \\ \vec{P} = (0, -P) = (0, -7848 \text{ N}) \end{cases}$$

Impostiamo le equazioni di equilibrio sull'asse x e y :

$$\begin{cases} (\hat{x}) : F_1 \cos 30^\circ - F_2 = 0 \implies F_2 = F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 15696 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13593 \text{ N} \approx 1.36 \times 10^4 \text{ N} \\ (\hat{y}) : F_1 \sin 30^\circ - P = 0 \implies \frac{F_1}{2} = 7848 \implies F_1 = 15696 \text{ N} \approx 1.57 \times 10^4 \text{ N} \end{cases}$$

Da cui ricaviamo (utilizzando $\cos(30^\circ)$ e $\sin(30^\circ)$):

$$F_1 = (13593, 7848) \text{ N}, \quad F_2 = (-13593, 0) \text{ N}$$

Sottraendo le componenti corrispondenti, troviamo il vettore differenza.

$$\begin{cases} \Delta F_x = F_{1x} - F_{2x} = 13593 - (-13593) = 27186 \text{ N} \\ \Delta F_y = F_{1y} - F_{2y} = 7848 - 0 = 7848 \text{ N} \end{cases}$$

Il suo modulo :

$$|\Delta \vec{F}| = \sqrt{(\Delta F_x)^2 + (\Delta F_y)^2} \approx 28296 \text{ N}$$

3.3 PROBABILITÀ E REGRESSIONE LINEARE

Attenzione

- Ricordati di scrivere prima tutti i casi possibili e poi di calcolare la probabilità.
- Ricordati di non perdere di vista i grafici e la proporzionalità delle grandezze (dirette o inverse) prima di dire se è valida una regressione lineare o meno. Non importa essere precisi, ma ragionevoli.

PROBABILITÀ INDIPENDENTE



Renzo lancia una moneta per 2 volte. Lucia lancia una moneta 4 volte. Sapendo che le monete non sono truccate, determina la probabilità che Renzo e Lucia ottengano lo stesso numero di teste.

Soluzione

Determiniamo la probabilità analizzando i possibili esiti dei lanci rispetto ai casi totali. Nei 2 lanci di Renzo ci sono in totale $2^2 = 4$ possibili sequenze:

- 0 teste (1 caso): (C, C)
- 1 testa (2 casi): $(T, C), (C, T)$
- 2 teste (1 caso): (T, T)

Le rispettive probabilità sono:

$$P_R(0) = \frac{1}{4}, \quad P_R(1) = \frac{2}{4}, \quad P_R(2) = \frac{1}{4}$$

Nei 4 lanci di Lucia ci sono in totale $2^4 = 16$ possibili sequenze:

- 0 teste (1 caso): (C, C, C, C)
- 1 testa (4 casi): la singola testa può trovarsi in una qualsiasi delle 4 posizioni
- 2 teste (6 casi): $(T, T, C, C), (T, C, T, C), (T, C, C, T), (C, T, T, C), (C, T, C, T), (C, C, T, T)$

Le rispettive probabilità sono:

$$P_L(0) = \frac{1}{16}, \quad P_L(1) = \frac{4}{16}, \quad P_L(2) = \frac{6}{16}$$

Renzo e Lucia ottengono lo stesso numero di teste se entrambi ne ottengono 0, oppure entrambi 1, oppure entrambi 2, perché Renzo ha solo 2 lanci a sua disposizione. Essendo eventi distinti e indipendenti, la probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità!

$$P(\text{stesso numero di teste}) = P_R(0) \cdot P_L(0) + P_R(1) \cdot P_L(1) + P_R(2) \cdot P_L(2)$$

$$P = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{16}\right) \approx 0.2344 \quad (23.44\%)$$

Nella tabella che segue sono riportate dieci persone che hanno già affrontato questa verifica, con i rispettivi tempi di studio e voti conseguiti.

Persona	Tempo (in ore)	Voto
Alfredo	1	7
Barbara	4	6.5
Carlotta	3	8.5
Demetrio	3	8
Elisa	5	7.5
Francesca	3	9
Gisella	5	9.5
Herbert	1	6
Ignazio	1	4
Jack	2	10

Prendendo come variabile indipendente x il voto e come variabile dipendente y il tempo speso nella preparazione, determina:

- media aritmetica (AM) e quadratica (QM) dei voti
- il grafico delle coppie $(x_i; y_i)$ al variare di i tra 1 e 10
- quanto mediamente frutta un'ora di studio per questo gruppo di persone
- se è ragionevole affermare che c'è una dipendenza lineare (o una correlazione di altro tipo) tra tempo speso e voto ottenuto

3.4 MOLLE

Attenzione

- Si furbo su come usare molle in serie e in parallelo in esercizi più complicati. Ricordati cosa aumenta e cosa diminuisce la k_{eq} .
- La frequenza di oscillazione varia come $\sqrt{k/m}$! Se raddoppio sia k che m la frequenza quindi rimarrà uguale, anche se l'ampiezza di oscillazione cambia!

BREVI ESERCIZI DI RISCALDAMENTO



1. Una molla ha una costante elastica $k = 120 \text{ N/m}$. Calcola di quanto si allunga se viene applicata una forza di 30 N .
2. La molla compie 20 oscillazioni complete in 10 secondi. Determina il periodo e la frequenza di oscillazione.
3. Due molle con costante $k_1 = 200 \text{ N/m}$ e $k_2 = 200 \text{ N/m}$ sono collegate in serie. Qual è la costante elastica equivalente del sistema?
4. Se le stesse due molle dell'esercizio precedente fossero collegate in parallelo, quale forza servirebbe per allungarle di 10 cm ?

MOLLA SU PIANO INCLINATO 1



Un blocco di 3.0 kg è fermo su un piano inclinato di 30° trattenuto da una molla parallela al piano. Se la molla si allunga di 12.3 cm , determina la costante elastica.

MOLLA IN VERTICALE

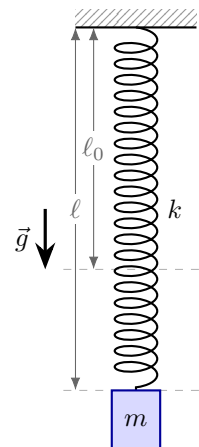


Siano dati una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 , con estremità superiore fissata, e una massa m attaccata all'estremità inferiore. Si risolvano i seguenti punti.

1. Calcola la forza peso $\vec{F}_p$ del corpo di massa m e se ne indichino direzione e verso.
2. Calcola la lunghezza della molla ℓ nel caso in cui il sistema appaia statico (molla e massa ferme).
3. Si decide ora di allungare la molla, tramite una forza esterna, di una lunghezza $\Delta\ell$. Dalla relazione $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ calcola quante oscillazioni si hanno in 20 s .

Dati

- Costante elastica della molla: $k = 45 \text{ N/m}$
- Lunghezza a riposo: $\ell_0 = 30 \text{ cm}$
- Massa del corpo appeso: $m = 0.50 \text{ kg}$
- Allungamento impresso: $\Delta\ell = 5.0 \text{ cm}$



MOLLA E PIANO INCLINATO 2



Un blocco di massa $m = 2.5 \text{ kg}$ è appoggiato su un piano inclinato liscio (privo di attrito), che forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con l'orizzontale. Il blocco è collegato, tramite una molla di costante elastica $k = 120 \text{ N/m}$ disposta parallelamente al piano, a un punto fisso posto sulla sommità del piano stesso. Il sistema si trova in equilibrio. Si risolvano i seguenti punti.

1. Scomponi la forza peso $\vec{F}_p$ nelle due componenti, parallele e perpendicolari al piano inclinato.

2. Scrivendo la condizione di equilibrio lungo la direzione perpendicolare al piano, ricava il modulo della reazione normale N .
3. Scrivendo la condizione di equilibrio lungo la direzione parallela al piano, ricava l'allungamento (o la compressione) della molla $\Delta\ell$, in funzione di m , g , k e θ .
4. Supponi ora che il piano non sia più liscio, ma presenti un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.40$ tra blocco e superficie. Determina l'intervallo di valori di $\Delta\ell$ per cui il sistema può rimanere in equilibrio.

ORIZZONTALE E VERTICALE

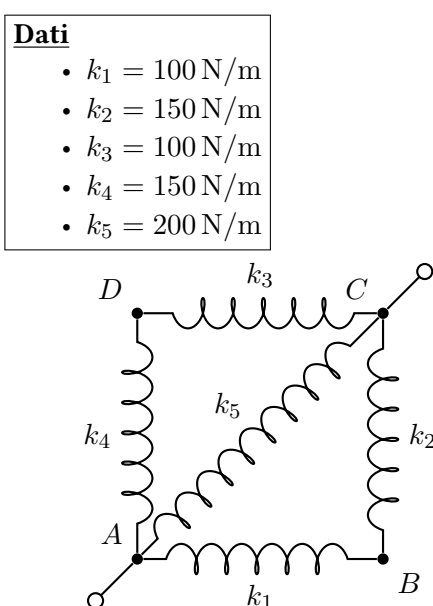


Una molla ideale su un supporto orizzontale ha massa di 1 kg e lunghezza a riposo di 10 cm. Quando la molla viene compressa da una forza di 10 N, si accorcia di 2 cm. Supponendo che g valga 10 m/s^2 , che lunghezza ha la molla quando qualcuno la afferra ad un'estremità e la tiene sospesa in verticale?

COMPOSIZIONE DI MOLLE IN SERIE E PARALLELO



Calcola la costante elastica totale della seguente configurazione di molle in serie e parallelo. Il circuito meccanico inizia nel punto A, prosegue con la suddetta configurazione di molle e successivamente prosegue dal punto C.



PROBLEM SOLVING



Abbiamo a disposizione una quantità smisurata di molle identiche, di massa trascurabile e di costante elastica 100 N/m . Collegando opportunamente alcune di queste molle, vogliamo realizzare un sistema con costante elastica di 40 N/m . Come possiamo progettare tale sistema?

UN OROLOGIO SU MARTE



Un astronauta della missione scientifica Mars-Dini atterra su Marte con l'obiettivo di calibrare uno strumento di misura del tempo basato sulle oscillazioni armoniche di una molla. Lo strumento è costituito da un corpo di massa $m = 0.50 \text{ kg}$ collegato a una molla ideale verticale di costante elastica $k = 200 \text{ N/m}$. Sapendo che l'accelerazione di gravità sulla Terra è $g_T = 9.81 \text{ m/s}^2$ e su Marte è $g_M = 3.71 \text{ m/s}^2$:

1. Calcola l'allungamento statico Δx subito dalla molla in condizioni di equilibrio sia sulla Terra sia su Marte.
2. Calcola la frequenza di oscillazione f dello strumento (in Hz) sulla Terra e su Marte una volta che il corpo viene spostato dalla sua posizione di equilibrio e lasciato oscillare liberamente nel vuoto.

PROBLEM SOLVING 2



Un laboratorio di fisica scolastico dispone di una scatola contenente numerose molle ideali identiche, ciascuna caratterizzata da una costante elastica nominale $k_0 = 100 \text{ N/m}$. Il professore assegna a Mattia il compito di progettare tre diversi circuiti elastici equivalenti che abbiano rispettivamente le seguenti costanti elastiche totali:

- Sistema A: $k_{eq,A} = 40 \text{ N/m}$

- Sistema B: $k_{eq,B} = 150 \text{ N/m}$
- Sistema C: $k_{eq,C} = 75 \text{ N/m}$

Per ciascuno dei tre sistemi, Matteo deve rispettare un vincolo fondamentale: utilizzare il numero minimo assoluto di molle individuali k_0 e dimostrare analiticamente la correttezza del proprio circuito elastico.

1. Determina il numero minimo di molle e descrivi la configurazione per il Sistema A.
2. Determina il numero minimo di molle e descrivi la configurazione per il Sistema B.
3. Determina il numero minimo di molle e descrivi la configurazione per il Sistema C.

Attenzione

1. Ricordati che in serie la costante elastica diminuisce, mentre in parallelo la rende più grande. È molto utile per capire se il collegamento principale sarà in serie o parallelo.
2. Esprimi la costante desiderata in funzione di k_0 (ovvero una frazione).
3. Inverti tale frazione e scomponi la nuova frazione in parti intere e frazionarie, dove le intere rappresentano.
4. I termini in $\frac{1}{k_0}$ sono i termini in serie, mentre i termini in $\frac{1}{n \cdot k_0}$ sono n molle in parallelo che si aggiungono alla serie.

Una sbarra rigida orizzontale, di massa trascurabile e lunghezza $L = 60$ cm, è sospesa alle sue due estremità da due molle verticali ideali aventi lunghezza a riposo identica $L_0 = 20$ cm. Le due molle hanno costanti elastiche differenti: la molla sinistra ha $k_A = 100$ N/m, mentre la molla destra ha $k_B = 300$ N/m. Un blocco di massa $M = 4.0$ kg viene appeso a un gancio lungo la sbarra, a una distanza d dall'estremità sinistra.

1. Determina l'esatta posizione d (in cm dall'estremità sinistra) in cui deve essere appeso il blocco affinché la sbarra, una volta raggiunto l'equilibrio statico, rimanga perfettamente orizzontale.
2. Calcola l'allungamento statico Δx subito dalle due molle in questa specifica condizione di equilibrio.
3. Se il blocco di massa M viene leggermente tirato verso il basso e rilasciato, l'intero sistema sbarra-massa inizia a oscillare verticalmente rimanendo sempre orizzontale. Calcola la costante elastica equivalente k_{eq} del sistema durante questa oscillazione e determina la sua frequenza $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$.

Soluzione

Affinché la sbarra rimanga perfettamente orizzontale, le due molle devono subire lo stesso allungamento $\Delta x_A = \Delta x_B = \Delta x$. Le forze elastiche esercitate dalle molle sono quindi $F_A = k_A \Delta x$ e $F_B = k_B \Delta x$. Notare che non sono uguali, anzi $F_B = 3 \cdot F_A$.

Dall'equilibrio alla traslazione verticale:

$$F_A + F_B = Mg \implies F_A + 3F_A = Mg \implies 4F_A = Mg$$

Imponendo l'**equilibrio dei momenti** rispetto all'estremità sinistra (punto A):

$$Mg \cdot d = F_B \cdot L \implies (4F_A) \cdot d = (3F_A) \cdot L \implies d = \frac{3}{4}L.$$

Avendo scelto il punto A per i momenti, non dobbiamo mettere la forza F_A che si trova già lì. Sostituendo $L = 60$ cm:

$$d = \frac{3}{4} \cdot 60 \text{ cm} = 45 \text{ cm} \quad \text{dall'estremità sinistra.}$$

Dall'**secondo principio della dinamica** $F_A + F_B = (k_A + k_B)\Delta x = Mg$:

$$\Delta x = \frac{Mg}{k_A + k_B} = \frac{4.0 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{100 \text{ N/m} + 300 \text{ N/m}} = \frac{39.24 \text{ N}}{400 \text{ N/m}} \approx 0.0981 \text{ m} = 9.81 \text{ cm}$$

Poiché la sbarra si muove rimanendo sempre orizzontale, le due molle lavorano in parallelo. La costante elastica equivalente del sistema è la somma diretta delle due costanti:

$$k_{eq} = k_A + k_B = 400 \text{ N/m}$$

La frequenza di oscillazione f è data da:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{400}{4.0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{100} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59 \text{ Hz}$$

3.5 CENTRO DI MASSA DI LAMINE 2D OMOGENEE

Attenzione

- Usa bene le simmetrie a tuo vantaggio o dividi in più pezzi simmetrici il problema.
- Ricordati che puoi aggiungere o togliere pezzi che non esistono nella figura principale.
- Ricorda che il centro di massa potrebbe non essere dentro la figura ma anche fuori!

QUIZ VELOCE!

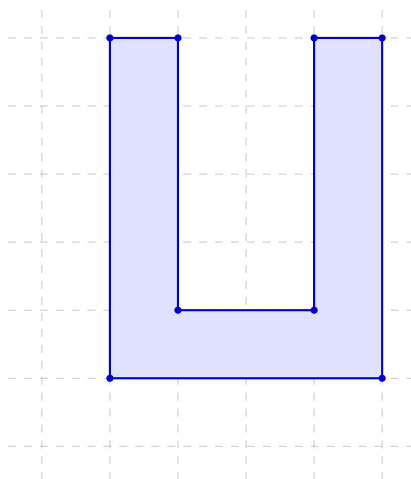


1. Spiega perché il centro di massa di una lamina a forma di anello non cade sulla superficie della lamina stessa e come questo influisce sul suo punto di equilibrio.
2. Una lamina è composta da due quadrati adiacenti di massa differente (uno è doppio rispetto all'altro). Determina la posizione del centro di massa del sistema graficamente.

LAMINA A "U"



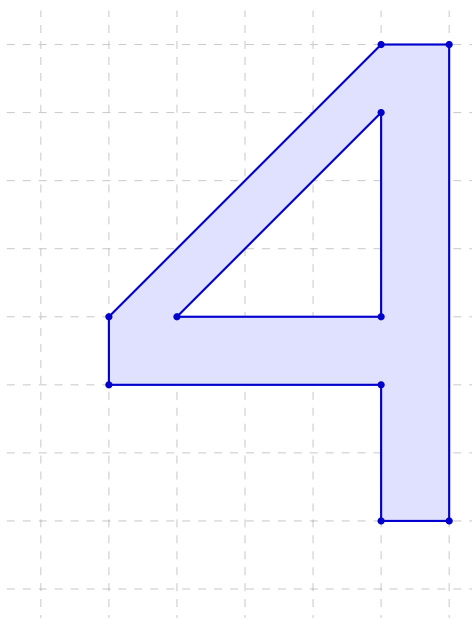
Calcola le coordinate del centro di massa della seguente lamina sottile omogenea. Lato di ciascun quadrato della griglia: $l = 2.0 \text{ cm}$.



NUMERO "4"



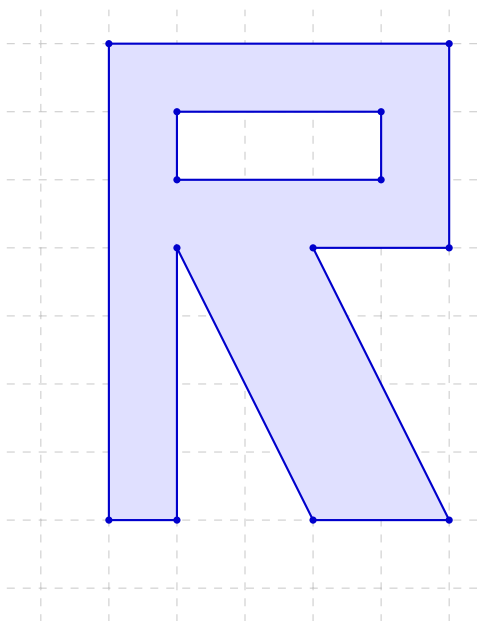
Indica le coordinate del centro di massa della seguente lamina sottile omogenea. Lato di ciascun quadrato della griglia: $l = 2.0 \text{ cm}$.



LAMINA A "R"



Indica le coordinate del centro di massa della seguente lamina sottile omogenea. Lato di ciascun quadrato della griglia: $l = 1.5$ cm.



CIRCONFERENZA

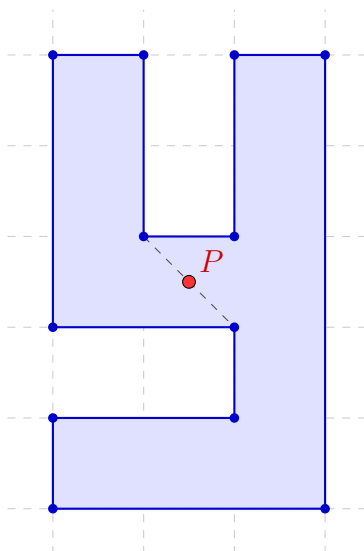


Consideriamo un quarto di circonferenza di estremi A,B. Questo arco, assieme alla corda AB, delimita un segmento circolare. Se il segmento circolare è omogeneo e AB misura 12 cm, a che distanza dal AB si trova il centro di massa del segmento circolare?

LAMINA A "Y"



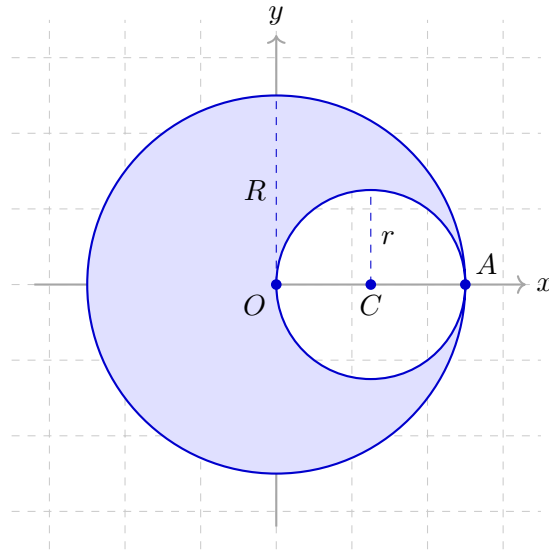
La lettera Y riportata in figura è una lamina rigida ed omogenea costituita da 11 quadretti di lato 30 cm. Ad Angela viene affidato il seguente incarico: rimuovendo interamente uno dei quadretti che costituiscono la lamina, fare in modo che il centro di massa di ciò che resta coincida con il punto P in figura (centro del quadretto centrale). Può Angela riuscire nell'impresa? Notare che non è indicata la lunghezza del lato.



CERCHI



Determina la posizione del centro di massa di una lamina piana omogenea di forma circolare dotata di un foro tangente al bordo come in figura. Siano R il raggio della lamina e r quello del foro. Si studi il caso particolare di $r=R/2$.



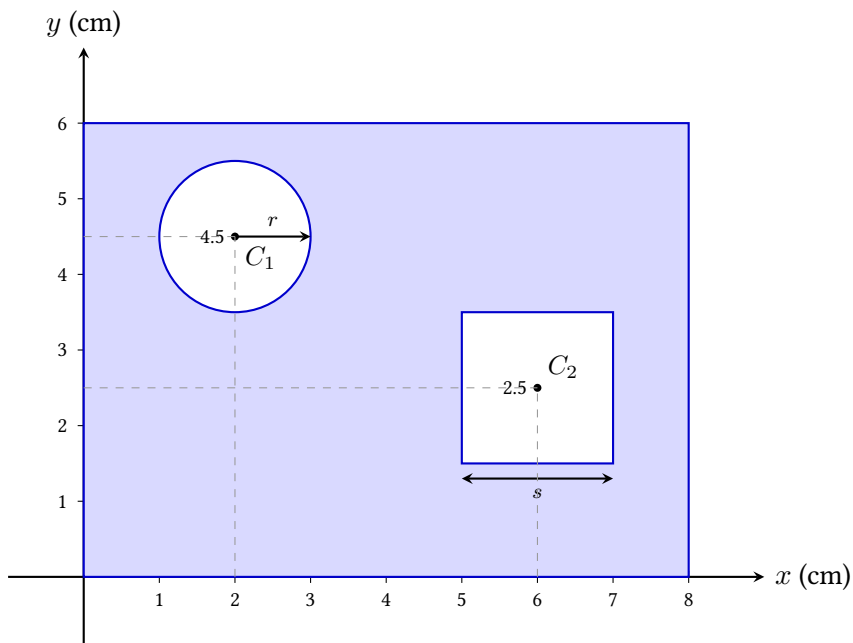
PIASTRA FORATA



Prendiamo una piastra rettangolare omogenea, come in figura. Per alleggerire la struttura, vengono praticate due cavità asimmetriche:

- Un foro circolare di raggio $r = 1,0$ cm con centro posizionato a coordinate $C_1(2,0; 4,5)$ cm.
- Un foro quadrato di lato $s = 2,0$ cm con centro posizionato a coordinate $C_2(6,0; 2,5)$ cm

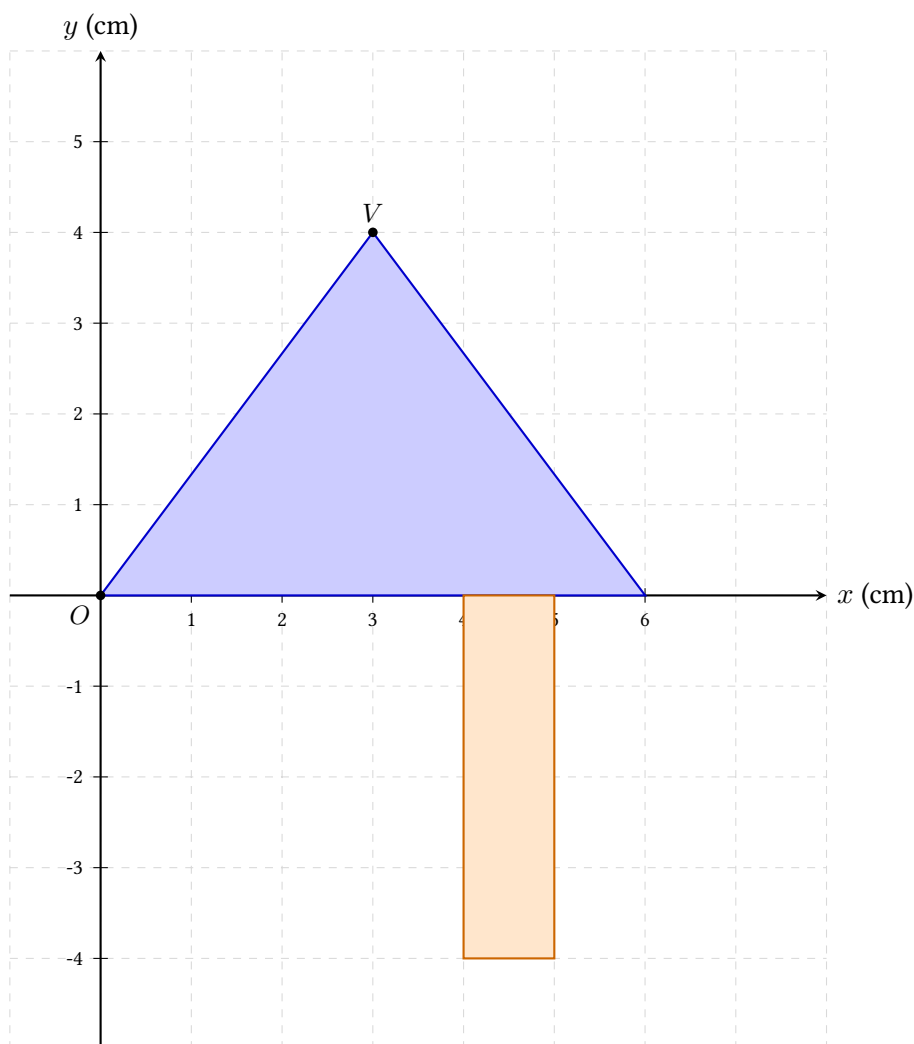
1. Determina l'area e centro di massa dei fori.
2. Determina le coordinate $(X_{cm}; Y_{cm})$ del suo centro di massa. Esprimi il risultato sia in forma esatta (mantenendo il simbolo di π) sia in forma numerica decimale arrotondata alla seconda cifra decimale.
3. Confronta le coordinate del CM forato con quelle del CM della piastra piena $(4,0; 3,0)$. Il baricentro si è spostato a destra o a sinistra? In alto o in basso?



UNA FRECCIA SOSPESA

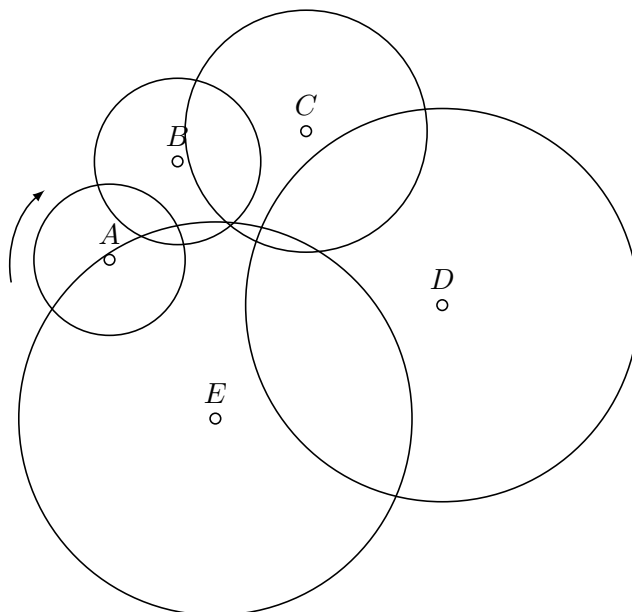


Una lamina omogenea è modellata a forma di freccia, come in figura. A causa di un difetto di fabbricazione, il gambo non è centrato, ma è asimmetrico e sbilanciato verso destra.



1. Utilizzando il sistema con origine in $O(0, 0)$ nel vertice sinistro della base del triangolo, determina le coordinate del centro di massa della punta (C_T) e del gambo (C_R) singolarmente.
2. Calcola il CM totale $G(X_{cm}, Y_{cm})$ del centro di massa della freccia asimmetrica.
3. Supponiamo di appendere la freccia esattamente sul vertice V ; essa si muoverà fino a raggiungere una configurazione di equilibrio stabile. All'equilibrio, la reazione del punto di sospensione è uguale e contraria alla forza peso dell'oggetto, applicata nel centro di massa. Il segmento VG sarà quindi lungo la verticale a contrastare la gravità. Quale angolo α formerà questo segmento rispetto alla linea geometrica?

Su una proposta di copertina di un noto testo di Matematica era riportata una configurazione di cinque ruote dentate analoga a quella in figura: le ruote centrate in A e B hanno raggio 2 cm, la ruota centrata in C ha raggio 3 cm e le ruote centrate in D ed E hanno raggio 5 cm. Cosa avviene a tutto il sistema quando si imprime un momento alla ruota A che le fa compiere un giro al secondo in senso orario?



Soluzione

In una catena di ingranaggi a contatto esterno, la direzione di rotazione si inverte a ogni passaggio:

- Se la ruota A ruota in senso orario (↻), allora la ruota B a essa tangente deve ruotare in senso antiorario (↺).
- La ruota C, a contatto con B, deve ruotare in senso orario (↻).
- La ruota D, a contatto con C, deve ruotare in senso antiorario (↺).
- La ruota E, a contatto con D, deve ruotare in senso orario (↻).

Poiché la ruota E è a contatto anche con la ruota A, la rotazione in senso orario di E imporrebbe alla ruota A di ruotare in senso antiorario (↺).

C'è una contraddizione irreconciliabile. Il sistema di ruote dentate si blocca completamente.

3.6 SCIVOLAMENTO SU PIANO INCLINATO LISCIO

Attenzione

1. Leggi attentamente il testo e rielabora un'immagine dell'esercizio.
2. Inserisci un sistema di riferimento centrato nella massa puntiforme dell'esercizio. Scrivi i dati e le varie condizioni iniziali.
3. Disegna il diagramma delle forze, con la loro corretta direzione e il loro nome. Non dimenticare le reazioni vincolari.
4. Scomponi le forze con seno e coseno lungo gli assi del sistema di riferimento.
5. Scrivi il secondo principio della dinamica sia sull'asse x che y e risolvi prima le equazioni in termini di lettere. Solo alla fine sostituisci i numeri.
6. Controlla sia con l'analisi dimensionale che con il tuo buon senso che la soluzione sia corretta!
7. Non dimenticare di ricontrollare di aver messo tutti i moduli e le unità di misura necessari.

TRASPORTO MEDICINALI



Per trasportare una cassa di medicinali di massa 180 Kg all'interno di una nave, alcuni operai utilizzano una passerella lunga 6 m che collega il molo al ponte della nave, posto a 1.5 m di altezza rispetto al molo.

1. Trascurando ogni attrito, determina la minima forza parallela alla passerella necessaria per spingere la cassa verso l'alto a velocità costante.
2. Gli operai decidono poi di sostituire la passerella con un'altra più lunga, in modo che la forza necessaria diminuisca del 25%. Quanto deve essere lunga la nuova passerella?

GIÙ VELOCE!



Un oggetto cade verticalmente da un'altezza h . Dimostra che la sua velocità finale è la stessa di un oggetto che scivola su un piano inclinato (senza attrito).

SCIVOLAMENTO SU UN PIANO INCLINATO 1



Un corpo di massa $M = 10$ kg si trova in cima ad un piano inclinato. Sapendo che la lunghezza del piano è di 2 m e la sua altezza è pari a 1 m, determina:

1. l'accelerazione con la quale si muove;
2. il modulo della reazione vincolare del piano;
3. il tempo che impiega a percorrere tutto il piano;
4. la velocità finale.

SOPRA E SOTTO



Un oggetto viene lanciato verticalmente verso il basso dal terrazzo di un palazzo alto 60 m, con una velocità iniziale di 20 m/s, e successivamente un altro oggetto identico viene lasciato cadere liberamente con velocità iniziale nulla. In entrambi i casi, a quale velocità urta il suolo e dopo quanto tempo?

SCIVOLAMENTO SU PIANO INCLINATO



Un blocco di massa $m = 4.0$ kg viene lasciato libero, con velocità iniziale nulla, sulla sommità di un piano inclinato liscio (privo di attrito) che forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con l'orizzontale. Il blocco scivola lungo il piano, percorrendo una distanza $L = 5.0$ m prima di raggiungere la base. Risolvi i seguenti punti.

1. Scomponi la forza peso $\vec{F}_p$ nelle due componenti, parallele e perpendicolari al piano inclinato, e calcola il modulo della reazione normale N .
2. Applicando il secondo principio della dinamica lungo la direzione parallela al piano, calcola il modulo dell'accelerazione a del blocco. Si verifichi che il risultato non dipende dalla massa m .

3. Usando le leggi del moto uniformemente accelerato, calcola il tempo t impiegato dal blocco per raggiungere la base del piano e la velocità v con cui vi arriva.
- * (*Facoltativo*) Supponi ora che il piano non sia più liscio, ma presenti un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.25$ tra blocco e superficie. Ricava la nuova espressione dell'accelerazione a' , e determina per quale valore di μ_d il blocco non scivola affatto (resta fermo).

ESERCIZI FINALE



Un blocco di metallo di massa $m = 5.00$ kg scivola lungo un piano inclinato liscio (privo di attrito) lungo $L = 8.00$ m e alto $h = 4.00$ m. All'istante della partenza dalla sommità ($v_0 = 0$), viene azionato un piccolo paracadute frenante che esercita una forza costante $F_f = 10.0$ N parallela al piano inclinato e rivolta verso la cima.

1. Perché la reazione normale del piano $\vec{N}$ non è influenzata dalla forza frenante?
2. Determina il modulo dell'accelerazione a del blocco lungo la discesa, confrontandolo con quello che avrebbe avuto senza paracadute.
3. Calcola il tempo t necessario per raggiungere la base del piano inclinato e la velocità finale v_f .

INVERTIAMO!



E' necessario conoscere le equazioni di secondo grado

Un corpo di massa $M = 4$ kg viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato (altezza $h = 2$ m, $\theta = 30^\circ$) con una velocità iniziale pari a 15 m/s. Si veda la figura

1. Quanto tempo impiega a giungere dal fondo alla cima del piano inclinato?
2. Studiare in modo accurato il moto successivo. Ci sono dei dati superflui?

E' necessario conoscere le equazioni di secondo grado

Un blocco di massa $m = 3,00 \text{ kg}$ viene lanciato dalla base di un piano inclinato liscio (privo di attrito) lungo $L = 6,00 \text{ m}$ e inclinato di $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. La velocità iniziale è $v_0 = 8,00 \text{ m/s}$, rivolta verso la cima.

- Rappresenta il diagramma delle forze sul blocco ed evidenzia le componenti parallele e perpendicolari della gravità. Calcola l'accelerazione a del blocco durante la fase di salita lungo la rampa, specificandone modulo, direzione e verso.
- Determina se il blocco riesce a superare la sommità della rampa ($L = 6,00 \text{ m}$) o se si arresta prima. Se si ferma sulla rampa, calcola lo spazio massimo percorso; se invece supera la cima, calcola la velocità residua v_{cima} con cui oltrepassa il bordo.

Soluzione

Fissando un sistema di coordinate cartesiane con l'asse x parallelo al piano inclinato e rivolto verso l'alto (verso la cima, lungo il moto) e l'asse y perpendicolare al piano:

- Componente della forza peso parallela al piano: $P_x = -mg \sin \alpha$ (spinge verso il basso)
- Componente della forza peso perpendicolare al piano: $P_y = -mg \cos \alpha$
- Forza normale esercitata dal piano: $N = mg \cos \alpha$

L'unica forza agente lungo la direzione del moto (x) è la componente parallela della forza peso. Per il secondo principio della dinamica:

$$F_x = -mg \sin \alpha = ma_x \implies a_x = -g \sin \alpha = -4.905 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione ha modulo $a = 4.91 \text{ m/s}^2$, direzione parallela al piano inclinato e verso diretto verso la base della rampa (verso il basso, quindi tende a far decelerare l'oggetto nella sua risalita della rampa).

Per determinare la distanza massima s_{max} percorribile prima di fermarsi ($v = 0$), troviamo prima l'istante in cui si ferma.

$$v_0 - a \cdot t = 0 \implies t = \frac{v_0}{a} \approx 1.63 \text{ s}$$

E quindi la massima distanza risulta essere:

$$s_{\text{max}} = 0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 6.52 \text{ m}$$

Poiché $s_{\text{max}} = 6.52 \text{ m} > L = 6.00 \text{ m}$, il blocco riesce a superare la sommità della rampa.

4 DOMANDE ORALE

4.1 MISURE ED INCERTEZZE DI MISURA

Per il ripasso veloce

1. Qual è la differenza fondamentale tra grandezze fisiche fondamentali e grandezze derivate nel Sistema Internazionale (SI)? Fai almeno due esempi per tipo. ★★☆☆☆
2. Qual è la definizione di sensibilità, portata e prontezza di uno strumento di misura? ★★☆☆☆
3. Come si calcola la semidispersione massima (o errore massimo) di un set di misure ripetute? Scrivi la formula ★★☆☆☆

Più ragionate

1. Come si calcolano l'errore relativo (ϵ_r) e l'errore relativo percentuale (ϵ_p)? Hanno sempre un'unità di misura? ★★☆☆☆
2. Devi misurare lo spessore di un singolo foglio di carta avendo a disposizione solo un righello millimetrato o il periodo di un pendolo con un solo cronometro. Conosci una procedura sperimentale per ridurre l'incertezza sulla misura? ★★☆☆☆
3. Disegna una figura irregolare a tua scelta su carta quadrettata/millimetrata. Calcola l'area stimando l'incertezza attraverso il conteggio dei quadretti parzialmente occupati. ★★☆☆☆
4. Secondo te perché la deviazione standard σ è spesso più utilizzata come incertezza di misura in fisica rispetto alla risoluzione di uno strumento? ★★☆☆☆
5. Se misuriamo il lato di un tavolo e otteniamo un errore relativo dell'1%, e poi misuriamo lo spessore di un capello ottenendo lo stesso errore relativo dell'1%, quale delle due misure è considerata più precisa dal punto di vista fisico? Perché? ★★☆☆☆
6. Quale criterio deve essere soddisfatto perché una misura (A). Sia ben scritta e definita (B). È compatibile con un valore teorico? ★★☆☆☆

4.2 VETTORI

Per il ripasso veloce

1. Qual è la differenza fondamentale tra una grandezza scalare e una grandezza vettoriale? Fai tre esempi per ciascuna. ★★☆☆☆
2. Dati i vettori $\vec{a} = 3\vec{x} - 2\vec{y}$ e $\vec{b} = \vec{x} + 5\vec{y}$, calcola le componenti cartesiane e il modulo del vettore $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$. ★★☆☆☆
3. Definisci le funzioni goniometriche $\sin \theta$ e $\cos \theta$ in un triangolo rettangolo in relazione ai cateti e all'ipotenusa. ★★☆☆☆

Più ragionate

1. Quali sono le definizioni di prodotto scalare ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) e prodotto vettoriale ($|\vec{a} \times \vec{b}|$)? Cosa restituisce ciascun prodotto (uno scalare o un vettore)? ★★☆☆☆
2. Spiega dettagliatamente come determinare la direzione e il verso del prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Cosa succede se calcoliamo invece $\vec{b} \times \vec{a}$? ★★☆☆☆
3. In un triangolo, due lati misurano $a = 5$ cm e $b = 8$ cm. L'angolo compreso è $\gamma = 60^\circ$. Calcola la lunghezza del terzo lato c . ★★☆☆☆
4. Dati i vettori dell'esercizio precedente, calcola il prodotto scalare $\vec{b} \cdot \vec{c}$ e $\vec{a} \cdot \vec{c}$. ★★☆☆☆

4.3 MOLLE

Per il ripasso veloce

1. Enuncia la legge di Hooke in forma vettoriale e scalare. Cosa indica il segno meno? ★★☆☆☆
2. Qual è la formula che lega la frequenza di oscillazione (f) a una massa m vincolata a una molla di costante elastica k ? Qual è la sua unità di misura? ★★☆☆☆
3. Come si calcola la costante elastica equivalente (k_{eq}) di due molle di costanti k_1 e k_2 disposte in parallelo o in serie? ★★☆☆☆

Più ragionate

1. Se raddoppio la massa appesa alla mia molla, come cambia la frequenza di oscillazione? E l'allungamento statico a riposo? ★★☆☆☆
2. Immagina di avere una molla omogenea di costante elastica k . Se la tagliamo esattamente a metà, ciascuna delle due metà risultanti avrà ancora la costante elastica k ? Perché? ★★☆☆☆
3. Perché una disposizione in serie risulta sempre più "morbida" (costante equivalente minore) di ciascuna delle singole molle, mentre una in parallelo risulta sempre più "rigida"? ★★☆☆☆

4.4 CENTRO DI MASSA DI LAMINE OMOGENEE

Per il ripasso veloce

1. Quali sono i principi fondamentali della fisica (ricorda i 3 principi di Newton e quello sul momento)? ★★☆☆☆
2. Definisci il concetto di centro di massa (o baricentro) di una lamina sottile ed esprimi la formula cartesiana per X_{cm} e Y_{cm} usando le aree A_i o m_i delle singole parti. ★★☆☆☆

Più ragionate

1. Dove si trova il centro di massa di un triangolo rettangolo di base b ed altezza h , posizionando l'angolo retto nell'origine degli assi cartesiani? ★★☆☆☆
2. Quali sono le leggi che deve rispettare un corpo rigido per essere veramente "statico"? ★★☆☆☆
3. È possibile che il centro di massa di un corpo rigido omogeneo si collochi in un punto dello spazio in cui non è presente alcuna materia fisica? Fai almeno due esempi. ★★☆☆☆

4.5 SCIVOLAMENTO SU PIANO INCLINATO LISCIO

Per il ripasso veloce

1. Scrivi la legge del moto rettilineo uniformemente accelerato. ★★☆☆☆
2. Come si definisce la reazione vincolare normale $\vec{N}$ sul piano inclinato? Qual è il suo modulo in assenza di altre forze esterne oltre alla gravità? ★★☆☆☆
3. Perché un corpo che scivola lungo un piano inclinato liscio accelera con $a = g \sin \theta$, indipendentemente dal suo peso o dalla sua massa. ★★☆☆☆

Più ragionate

1. Se lasciamo cadere una palla di piombo verticalmente da un'altezza h , oppure la facciamo scivolare lungo un piano inclinato liscio della stessa altezza h , le due velocità finali all'impatto con il suolo sono uguali? Quale delle due impiega più tempo a raggiungere il fondo e perché? ★★☆☆☆
2. Un corpo di massa $m = 10$ kg si trova su un piano inclinato liscio lungo $L = 6$ m e alto $h = 3$ m. Calcola il tempo necessario per percorrerla interamente partendo da fermo. ★★☆☆☆

5 PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

5.1 CONSIGLI PER L'ESAME

Avvertenze

- Porta una penna funzionante e una calcolatrice.
- Stampa il formulario e chiedi al prof se puoi usarlo.
- Leggi prima **tutta** la verifica. Chiedi al prof se non capisci qualche traccia.
- Dopo, decidi i tuoi 3 esercizi e rileggi attentamente e lentamente i vari punti. Non avere fretta nel capire che cosa ti viene richiesto.
- Disegna il problema e non dimenticarti di mettere i nomi alle forze nel diagramma. Riporta tutti i dati.
- Scrivi tutte le formule che ti possono servire dati i tuoi dati. Scrivi tutto con le lettere e solo alla fine metti i numeri.
- **Mantieni la calma e la concentrazione: ce la puoi fare!**
- Nel tempo aggiuntivo fai un altro problema. **E' meglio se ne fai 4!**
- Negli ultimi minuti rileggi il compito e controlla!
 - **Ricontrolla di mettere tutte le unità di misura. Dimensionalmente hanno senso le tue formule?**
 - **Ricontrolla di aver messo tutti i moduli, quando servono ovviamente eh.**
 - **I seni e coseni sono meno di 1? Sono compatibili con i valori notevoli che hai studiato?**
 - **Le misure sono scritte con gli errori assoluti? Hanno le cifre significative giuste?**

5.2 SIMULAZIONE DI ESAME

Attenzione

Questa verifica è composta da 5 esercizi indipendenti, ciascuno strutturato su un massimo di 2 punti di domanda che richiedono sia calcolo numerico/algebrico sia una riflessione concettuale.

Regola: devi scegliere e svolgere almeno 3 esercizi a tua scelta

Ciascun punto dei vari esercizi ha una difficoltà indicata da delle stelline. Pianifica la tua strategia nei primi 5 minuti di lettura.

- Soglia minima per la sufficienza: almeno 18 stelle accumulate.
- **Soglia obiettivo: almeno 22 stelle accumulate.**
- Soglia per l'eccellenza: almeno 28 stelle accumulate.

Il tempo stimato per il completamento autonomo dell'intera prova è di **1 ora-1 ora 1/4**.

Ricorda: di motivare sempre i passaggi fisici, esplicitare le formule utilizzate e presentare i risultati numerici con le corrette unità di misura e cifre significative. Ognuna di queste toglie un punto.

ESERCIZIO 1

Un cilindro omogeneo di bronzo ha una massa misurata pari a $m = (150.0 \pm 0,5)$ g, un diametro $d = (2,00 \pm 0,02)$ cm e un'altezza $h = (5,00 \pm 0,05)$ cm.

1. ★★★★★ Calcola il volume V del cilindro ed esprimi la misura nel formato corretto ($V \pm \Delta V$), dimostrando prima formalmente la formula di propagazione dell'errore relativo: $e_r(V) = 2 \cdot e_r(d) + e_r(h)$.
2. ★★★★★ Determina la pressione d'appoggio $P = \frac{F_p}{A}$ (che si misura in pascal, $Pa = N/m^2$) che il cilindro esercita con il suo peso su un tavolo orizzontale quando è posizionato in verticale sulla sua base circolare. Esprimi il risultato nel formato corretto con la sua incertezza assoluta ($P \pm \Delta P$).

Suggerimento: la pressione è F/area . Come si propagherà l'errore sulla forza peso? Come si propagherà l'errore sull'area di base?

ESERCIZIO 2

In un triangolo qualunque ABC sui vettori di spostamento lato passanti per lo stesso vertice A, sono noti i moduli dei vettori $|\vec{AB}| = 8,00 \text{ cm}$ e $|\vec{AC}| = 5,00 \text{ cm}$. Le misurazioni di laboratorio indicano che il loro prodotto scalare vale esattamente $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20,00 \text{ cm}^2$.

- ★★★★★ Calcola il coseno dell'angolo α compreso tra i due vettori e determina il valore dell'angolo α .
- ★★★★★ Esprimi il vettore lato $\vec{BC}$ come differenza vettoriale tra $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$. Sapendo che $|\vec{BC}|^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC}$, sviluppa $\vec{BC}$ in termini di $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$ e ricava la lunghezza $|\vec{BC}|$.

ESERCIZIO 3

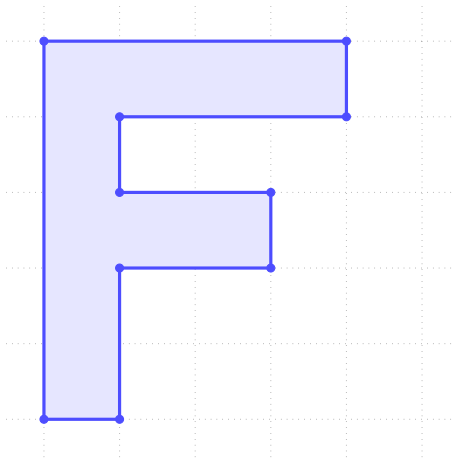
Una molla ideale omogenea, caratterizzata da una costante elastica iniziale $k_{tot} = 120 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $L_0 = 40 \text{ cm}$, viene tagliata di netto in due pezzi asimmetrici, lunghi rispettivamente $L_1 = 10 \text{ cm}$ e $L_{2,0} = 30 \text{ cm}$.

- ★★★★★ Calcola le costanti elastiche k_1 e k_2 dei due singoli segmenti ottenuti.
- ★★★★★ Se colleghiamo i due pezzi in parallelo tra loro per sostenere una massa $m = 2,0 \text{ kg}$ in verticale, determina la costante equivalente del parallelo k_{eq} e calcola il numero di oscillazioni complete che la massa compie in un intervallo di tempo di 10 secondi.

ESERCIZIO 4

Considera una lamina piana, rigida e omogenea sagomata a forma di lettera "F", posizionata su una griglia cartesiana con l'origine $O(0, 0)$ nell'angolo inferiore sinistro. Ciascun quadretto della griglia ha lato $l = 1,00 \text{ cm}$.

- ★★★★★ Scomponi la figura e determina l'area totale A_{tot} e le coordinate dei centri di massa parziali C_1, C_2 e C_3 di ciascuna parte.
- ★★★★★ Calcola le coordinate finali (X_{cm}, Y_{cm}) del centro di massa totale e discuti la sua particolare posizione geometrica rispetto al bordo fisico della lamina.



ESERCIZIO 5

Un blocco di metallo di massa $m = 5,00 \text{ kg}$ viene lanciato dalla sommità di un piano inclinato liscio lungo $L = 7,00 \text{ m}$ ed inclinato di un angolo $\alpha = 25^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il blocco da fermo scende verso il basso. Alla base della rampa, il piano prosegue in orizzontale.

- ★★★★★ Scomponi le forze agenti sul blocco durante la fase di discesa lungo la rampa, disegnando il diagramma a corpo libero. Calcola il modulo dell'accelerazione a del corpo lungo il piano inclinato e indica segno e direzione.
- ★★★★★ Calcola il tempo t necessario per raggiungere la base del piano inclinato e determina il modulo della velocità finale v_f con cui il blocco raggiunge il fondo della rampa prima di proseguire sul tratto orizzontale.

5.3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

PUNTO 1

I dati sperimentali con le rispettive incertezze assolute sono:

$$m = (150,0 \pm 0,5) \text{ g} = (0,1500 \pm 0,0005) \text{ kg}$$

$$d = (2,00 \pm 0,02) \text{ cm}$$

$$h = (5,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

L'errore relativo associato al diametro d e all'altezza h risulta:

$$e_r(d) = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{0,02 \text{ cm}}{2,00 \text{ cm}} = 0,010 = 1,0\%$$

$$e_r(h) = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{0,05 \text{ cm}}{5,00 \text{ cm}} = 0,010 = 1,0\%$$

Dimostrazione formale della propagazione del Volume:

La formula del volume di un cilindro retto è:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot d \cdot d \cdot h$$

Poiché il fattore $\frac{\pi}{4}$ è un numero puro privo di incertezza, applicando la regola di propagazione del prodotto (somma degli errori relativi per i singoli termini), si ottiene:

$$e_r(V) = e_r(h) + e_r(d^2)$$

$$e_r(d^2) = e_r(d) + e_r(d)$$

$$e_r(V) = 2 \cdot e_r(d) + e_r(h)$$

Calcoliamo il valore centrale del volume V_0 :

$$V_0 = \frac{\pi \cdot (2,00 \text{ cm})^2}{4} \cdot 5,00 \text{ cm} = 5,00\pi \text{ cm}^3 \approx 15,708 \text{ cm}^3$$

L'errore relativo complessivo del volume è:

$$e_r(V) = 2 \cdot (0,010) + 0,010 = 0,030 = 3,0\%$$

L'errore assoluto ΔV è:

$$\Delta V = V_0 \cdot e_r(V) = 15,708 \text{ cm}^3 \cdot 0,030 \approx 0,471 \text{ cm}^3$$

Arrotondando l'incertezza assoluta a una cifra significativa (come da prassi di laboratorio): $\Delta V = 0,5 \text{ cm}^3$. Allineando le cifre decimali del valore centrale, la misura scritta correttamente è:

$$V = (15,7 \pm 0,5) \text{ cm}^3$$

PUNTO 2

La pressione d'appoggio P esercitata sul tavolo quando il cilindro è in verticale è data dal rapporto tra la forza peso F_p e la superficie di base A :

$$P = \frac{F_p}{A} = \frac{mg}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4mg}{\pi d^2}$$

dove $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ è un fattore privo di incertezza.

Il valore centrale P_0 (dopo aver convertito in con $m = 0,1500 \text{ kg}$ e $d = 0,0200 \text{ m}$) è:

$$P_0 = \frac{4 \cdot 0,1500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\pi \cdot (0,0200 \text{ m})^2} = \frac{5,886}{0,0004\pi} \text{ Pa} = \frac{14715}{\pi} \text{ Pa} \approx 4683,9 \text{ Pa}$$

Propagazione dell'errore sulla pressione:

L'errore relativo sulla pressione si calcola sommando gli errori relativi dei singoli termini moltiplicativi (moltiplicando per l'esponente preso in modulo):

$$e_r(P) = e_r(m) + 2 \cdot e_r(d)$$

Calcoliamo l'errore relativo della massa:

$$e_r(m) = \frac{0,5 \text{ g}}{150,0 \text{ g}} \approx 0,00333 \approx 0,33\%$$

Pertanto:

$$e_r(P) = 0,00333 + 2 \cdot (0,010) = 0,02333 = 2,33\%$$

L'errore assoluto della pressione ΔP è:

$$\Delta P = P_0 \cdot e_r(P) = 4683,9 \text{ Pa} \cdot 0,02333 \approx 109,3 \text{ Pa}$$

Arrotondando l'incertezza a due cifre significative, $\Delta P = 110 \text{ Pa}$ (ovvero $0,11 \cdot 10^3 \text{ Pa}$). Allineando il valore centrale alla stessa cifra decimale dell'incertezza, il risultato finale espresso in unità S.I. è:

$$\mathbf{P} = (4680 \pm 110) \text{ Pa} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{P} = (4,68 \pm 0,11) \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

ESERCIZIO 2

PUNTO 1

Dalla definizione geometrica di prodotto scalare tra i due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos \alpha$$

Sostituendo i dati noti del problema ($AB = 8,00 \text{ cm}$, $AC = 5,00 \text{ cm}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20,00 \text{ cm}^2$):

$$20,00 = 8,00 \cdot 5,00 \cdot \cos \alpha \implies 20,00 = 40,00 \cdot \cos \alpha$$

Isolando il coseno otteniamo il valore esatto:

$$\cos \alpha = \frac{20,00}{40,00} = \mathbf{0,5}$$

L'ampiezza dell'angolo α in gradi sessagesimali è l'arcocoseno di 0,5, che corrisponde all'angolo notevole:

$$\alpha = \arccos(0,5) = \mathbf{60,0^\circ}$$

PUNTO 2

Il vettore lato $\vec{BC}$ che chiude il triangolo rappresenta la differenza vettoriale tra $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$:

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

Calcoliamo il modulo quadro sfruttando la definizione di prodotto scalare e le sue proprietà distributiva e commutativa:

$$\begin{aligned} \|\vec{BC}\|^2 &= \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ \|\vec{BC}\|^2 &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} \\ \|\vec{BC}\|^2 &= \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2 \cdot (\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \end{aligned}$$

Si nota immediatamente che questo sviluppo algebrico vettoriale coincide esattamente con la formulazione classica del **Teorema del coseno** (vedi il formulario). Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned} \|\vec{BC}\|^2 &= (5,00 \text{ cm})^2 + (8,00 \text{ cm})^2 - 2 \cdot (20,00 \text{ cm}^2) \\ \|\vec{BC}\|^2 &= 25,00 + 64,00 - 40,00 = 49,00 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Estraendo la radice quadrata (considerando la sola soluzione positiva sensata per una lunghezza fisica):

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{49,00 \text{ cm}^2} = \mathbf{7,00 \text{ cm}}$$

ESERCIZIO 3

PUNTO 1

Una molla ideale omogenea può essere modellata come una serie di tantissime piccole molle elementari. Dunque più la dividiamo in tanti piccole L , tanto più saranno le costanti in serie. Di conseguenza, la costante elastica di una molla è inversamente proporzionale alla sua lunghezza a riposo ($k \propto 1/L$), ovvero il prodotto della costante elastica per la sua lunghezza a riposo si mantiene costante per ogni porzione della molla:

$$k_{\text{tot}} \cdot L_0 = k_1 \cdot L_1 = k_2 \cdot L_2$$

Sapendo che $k_{\text{tot}} = 120 \text{ N/m}$, $L_0 = 40 \text{ cm} = 0,40 \text{ m}$, $L_1 = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$ e $L_2 = 30 \text{ cm} = 0,30 \text{ m}$:

$$k_{\text{tot}} \cdot L_0 = 120 \text{ N/m} \cdot 0,40 \text{ m} = 48 \text{ N}$$

Ora possiamo ricavare istantaneamente le costanti elastiche dei due segmenti:

$$k_1 = \frac{k_{\text{tot}} \cdot L_0}{L_1} = 4 \cdot k_{\text{tot}} = \mathbf{480 \text{ N/m}}$$

$$k_2 = \frac{k_{\text{tot}} \cdot L_0}{L_2} = \frac{4}{3} \cdot k_{\text{tot}} \mathbf{160 \text{ N/m}}$$

PUNTO 2

Quando due molle sono collegate in parallelo per sostenere lo stesso carico, esse subiscono lo stesso allungamento statico Δx . La costante elastica equivalente del parallelo è pari alla somma delle singole costanti:

$$k_{\text{par}} = k_1 + k_2 = 480 \text{ N/m} + 160 \text{ N/m} = \mathbf{640 \text{ N/m}}$$

La frequenza fondamentale di oscillazione f di un sistema massa-molla è definita come:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{par}}}{m}}$$

Sostituendo la massa del carico $m = 2,0 \text{ kg}$ e la costante equivalente calcolata:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{640 \text{ N/m}}{2,0 \text{ kg}}} = \frac{\sqrt{320}}{2\pi} \text{ Hz} \approx \frac{17,8885}{6,2832} \text{ Hz} \approx \mathbf{2,847 \text{ Hz}}$$

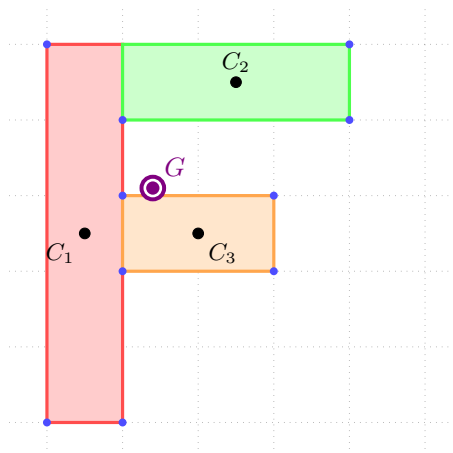
Il numero di oscillazioni complete N_{osc} compiute nell'intervallo $\Delta t = 10 \text{ s}$ è:

$$N_{\text{osc}} = f \cdot \Delta t = 2,847 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ s} = 28,47$$

Poiché si richiedono le sole oscillazioni *complete*, effettuiamo un troncamento all'intero più vicino verso il basso:

$$\mathbf{N_{\text{osc}} = 28 \text{ oscillazioni complete}}$$

ESERCIZIO 4



PUNTO 1

Scomponiamo la lettera "F" piana e omogenea posizionata sulla griglia cartesiana (con quadretto $l = 1,00$ cm) in tre sotto-rettangoli elementari:

1. **Gambo Verticale:** di larghezza 1 cm e altezza 5 cm.

- Area: $A_1 = 1 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 5 \text{ cm}^2$
- Centro di massa C_1 : posto nel suo centro geometrico di simmetria:

$$C_1(x_1; y_1) = (0,50; 2,50) \text{ cm}$$

2. **Traversa Superiore:** di larghezza 3 cm e altezza 1 cm, adiacente al gambo.

- Area: $A_2 = 3 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$
- Centro di massa C_2 : posto nel suo centro geometrico di simmetria:

$$C_2(x_2; y_2) = (2,50; 4,50) \text{ cm}$$

3. **Traversa Centrale:** di larghezza 2 cm e altezza 1 cm, adiacente al gambo.

- Area: $A_3 = 2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$
- Centro di massa C_3 : posto nel suo centro geometrico di simmetria:

$$C_3(x_3; y_3) = (2,00; 2,50) \text{ cm}$$

L'area totale della lamina è pari alla somma delle aree parziali:

$$A_{\text{tot}} = A_1 + A_2 + A_3 = 5 + 3 + 2 = 10,00 \text{ cm}^2$$

PUNTO 2

Applichiamo le equazioni delle medie ponderate delle coordinate geometriche pesate sulle aree delle singole parti della lamina:

$$X_{cm} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_{\text{tot}}} = 1,40 \text{ cm}$$

$$Y_{cm} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_{\text{tot}}} = 3,10 \text{ cm}$$

Il centro di massa totale si colloca nel punto esatto:

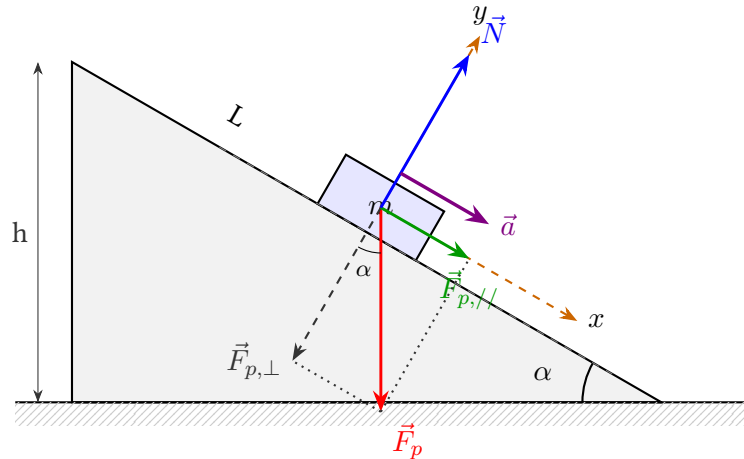
$$\mathbf{G}(1,00; 3,00) \text{ cm}$$

Discussione geometrica sulla posizione del CM:

Il punto ottenuto si trova esattamente sul bordo esterno della trasversale centrale della lettera "F", per via della maggiore massa delle regione con centri di massa C_1 e C_2 .

Questo esercizio mostra che il baricentro di un corpo rigido non deve necessariamente risiedere all'interno di un punto pieno di materia, ma può posizionarsi sul bordo o nel vuoto/foto a causa delle asimmetrie geometriche della distribuzione di massa.

Esercizio 5



Punto 1

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso (direzione della discesa) e l'asse y ortogonale ad esso, diretto verso l'alto.

La forza peso $\vec{F}_p$ del blocco di metallo (massa $m = 3,00 \text{ kg}$) agisce verticalmente verso il basso. Scomponiamola lungo i nostri assi coordinati:

$$|\vec{F}_{p,||}| = mg \sin \alpha = 5,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin(25^\circ) \approx \mathbf{20,73 \text{ N}}$$

$$|\vec{F}_{p,\perp}| = mg \cos \alpha = 5,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos(25^\circ) \approx \mathbf{44,45 \text{ N}}$$

La reazione normale d'appoggio $\vec{N}$ del piano equilibra esattamente la componente perpendicolare della gravità per la condizione di vincolo ($a_y = 0$):

$$|\vec{N}| = |\vec{F}_{p,\perp}| = mg \cos \alpha \approx 44,45 \text{ N}$$

Applicando la seconda legge di Newton lungo l'asse x (direzione di scivolamento parallela alla rampa), poiché il piano è liscio e privo di attrito:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_x \implies |\vec{F}_{p,||}| = m \cdot |\vec{a}| \implies mg \sin \alpha = m \cdot a$$

Semplificando la massa m :

$$|\vec{a}| = g \sin \alpha = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin(25^\circ) = 9,81 \cdot 0,500 = \mathbf{4,15 \text{ m/s}^2}$$

L'accelerazione ha modulo pari a $4,91 \text{ m/s}^2$, ha direzione **parallela al piano inclinato** e segno **positivo**.

Punto 2

La discesa lungo la rampa di lunghezza $L = 6,00 \text{ m}$ è descritta dalla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$L = \frac{1}{2}at^2 \implies t = \sqrt{\frac{2L}{a}} \approx \mathbf{1,84 \text{ s}}$$

Calcoliamo la velocità finale v_f raggiunta alla base della rampa prima dell'imbocco del tratto orizzontale:

$$v_f = a \cdot t \approx 4,146 \text{ m/s}^2 \cdot 1,838 \text{ s} \approx \mathbf{7,62 \text{ m/s}}$$

6 RINGRAZIAMENTI E NOTE D'AUTORE

Avvertenze

Si specifica che la presente dispensa è frutto del mio lavoro personale di rielaborazione, sintesi e trascrizione. **Il materiale è distribuito a titolo completamente gratuito ed è destinato a un uso puramente privato e didattico.** È severamente vietato qualsiasi utilizzo, riproduzione o distribuzione di questo documento a fini commerciali, di vendita o di lucro.

Questo documento nasce con lo scopo di fornire un supporto didattico mirato al recupero scolastico e al ripasso individuale di fisica per uno studente del Liceo Scientifico Dini di Pisa, in vista della prova di riparazione di agosto.

RIFERIMENTI METODOLOGICI E CREDITI

L'intera struttura tematica, l'impostazione concettuale e la filosofia didattica di questi moduli di ripasso si conformano fedelmente al programma svolto e alle linee guida tracciate dal professor **Jacopo "Jack" D'Aurizio**, docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Dini di Pisa.

Numerosi esercizi, quesiti teorici e problemi fisici contenuti in queste pagine sono tratti direttamente o parzialmente dalle verifiche scritte in classe e dalle relazioni di laboratorio curate dal docente. Per consultare i testi originali, le soluzioni ufficiali e l'archivio completo delle risorse didattiche del docente, si rimanda calorosamente al suo sitoweb:

www.matemate.info

CONSULENZE

Desidero inoltre esprimere la mia sincera gratitudine a **Davide Labrosciano** per il prezioso confronto fornito in merito ad alcuni problemi fisici e l'estetica di questa dispensa.

UTILIZZO DI IA GENERATIVE

Per la progettazione tipografica, lo sviluppo di esempi e, in particolare, il codice geometrico vettoriale che ha permesso la generazione delle illustrazioni grafiche in **TikZ** (dove ammetto di non essere ancora particolarmente portata), è stata utilizzata la tecnologia di intelligenza artificiale **Gemini (Google)**.

Licenza d'uso e condivisione

Quest'opera è rilasciata sotto la licenza internazionale: **Creative Commons (CC BY-NC-SA 4.0)**
[Visualizza i dettagli della licenza legale](#)